Aufgabe 3.1

$x^4 - 3x^2 - 4 = (x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$

$x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2,\ x_2 = 2$

$x^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -\mathrm{i},\ x_4 = \mathrm{i}$

Aufgabe 3.2

Ansatz: $z = x + \mathrm{i}y$

$$\begin{aligned} 2z - \mathrm{i}\,(z + 2 + 6\,\mathrm{i}) &= \bar{z} \\ 2(x + \mathrm{i}y) - \mathrm{i}(x + \mathrm{i}y + 2 + 6\mathrm{i}) &= x - \mathrm{i}y \\ 2x + 2y\mathrm{i} - x\mathrm{i} + y - 2\mathrm{i} + 6 &= x - y\mathrm{i} \end{aligned}$$

Gleichung der Realteile: $2x + y + 6 = x$

$$x + y = -6 \quad [1]$$

Gleichung der Imaginärteile: $2y - x - 2 = -y$

$$-x + 3y = 2 \quad [2]$$

[1]+[2]: $4y = -4 \quad \Rightarrow \quad y = -1$

[1]: $x - 1 = -6 \quad \Rightarrow \quad x = -5$

$z = -5 - i$

Aufgabe 3.3

$z^3 = 1 = \operatorname{cis} 0°$

$z_0 = \operatorname{cis} \dfrac{0° + 0 \cdot 360°}{3} = \operatorname{cis} 0° = 1$

$z_1 = \operatorname{cis} \dfrac{0° + 1 \cdot 360°}{3} = \operatorname{cis} 120° = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

$z_2 = \operatorname{cis} \dfrac{0° + 2 \cdot 360°}{3} = \operatorname{cis} 240° = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

Aufgabe 3.4

$z^4 = 16\mathrm{i} = 16 \operatorname{cis} 90° = 2^4 \operatorname{cis} 90°$

$$z_0 = 2 \operatorname{cis} \frac{90° + 0 \cdot 360°}{4} = 2 \operatorname{cis} 22.5°$$

$$z_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{90° + 1 \cdot 360°}{4} = 2 \operatorname{cis} 112.5°$$

$$z_2 = 2 \operatorname{cis} \frac{90° + 2 \cdot 360°}{4} = 2 \operatorname{cis} 202.5°$$

$$z_3 = 2 \operatorname{cis} \frac{90° + 3 \cdot 360°}{4} = 2 \operatorname{cis} 292.5°$$

Aufgabe 3.5

$z^2 = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i} = 2 \operatorname{cis} 60°$

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{60° + 0 \cdot 360°}{2} = \sqrt{2} \operatorname{cis} 30° \\ &= \sqrt{2}(\cos 30° + \mathrm{i} \sin 30°) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_2 &= \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{60° + 1 \cdot 360°}{2} = \sqrt{2} \operatorname{cis} 210° \\ &= \sqrt{2}(\cos 210° + \mathrm{i} \sin 210°) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.6

$$\begin{aligned} z + 3 &= 2\mathrm{i}(z - 4\mathrm{i}) \\ z + 3 &= 8 + 2z\mathrm{i} \\ z - 2z\mathrm{i} &= 5 \\ z(1 - 2\mathrm{i}) &= 5 \\ z &= \frac{5}{1 - 2\mathrm{i}} \\ &= \frac{5(1 + 2\mathrm{i})}{(1 + 2\mathrm{i})(1 - 2\mathrm{i})} = \frac{5(1 + 2\mathrm{i})}{5} = 1 + 2\mathrm{i} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.7

Setze $z = x + \mathrm{i}y$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) + 2\mathrm{i}z + 3\overline{z} &= 8 \\ x + 2\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) + 3(x - \mathrm{i}y) &= 8 \\ x + 2x\mathrm{i} - 2y + 3x - 3\mathrm{i}y &= 8 \\ 4x - 2y + 2x\mathrm{i} - 3y\mathrm{i} &= 8 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich: $4x - 2y = 8 \quad [1]$ Realteile

$2x - 3y = 0 \quad [2]$ Imaginärteile

$[1] - 2 \cdot [2]$: $4y = 8 \quad \Rightarrow \quad y = 2$

$[2]$: $2x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

$z = 3 + 2i$

Aufgabe 3.8

x		-9	25	-25	
1	1	-8	17	-8	($x = 1$ ist keine Nullstelle)
5	1	-4	5	0	($x_1 = 5$ ist erste Nullstelle)

Faktorzerlegung:

$x^3 - 9x^2 + 25x - 25 = (x - 5)(x^2 - 4x + 5)$

$D = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 + 2\mathrm{i}}{2} = 2 + \mathrm{i}$$

$$x_3 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 - 2\mathrm{i}}{2} = 2 - \mathrm{i}$$

Aufgabe 3.9

$z^2 - (6 - 2\mathrm{i})z + (11 - 10\mathrm{i}) = 0$

Koeffizienten: $a = 1$, $b = -(6 - 2\mathrm{i})$ $c = 11 - 10\mathrm{i}$

$$\begin{aligned} d^2 &= b^2 - 4ac = (6 - 2\mathrm{i})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (11 - 10\mathrm{i}) \\ &= 32 - 24\mathrm{i} - 44 + 40\mathrm{i} = -12 + 16\mathrm{i} \end{aligned}$$

Ansatz: $d^2 = (x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i} = -12 + 16\mathrm{i}$

Koeffizientenvergleich: $x^2 - y^2 = -12 \quad \Rightarrow \quad d_1 = 2 + 4\mathrm{i}$

$2xy = 16 \qquad d_2 = -2 - 4\mathrm{i}$

$$z_1 = \frac{-b + d_1}{2a} = \frac{6 - 2\mathrm{i} + 2 + 4\mathrm{i}}{2} = 4 + \mathrm{i}$$

$$z_2 = \frac{-b + d_2}{2a} = \frac{6 - 2\mathrm{i} - 2 - 4\mathrm{i}}{2} = 2 - 3\mathrm{i}$$

Aufgabe 3.10

Normierte Form: $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

$p = s - r^2/3 = -3$

$q = 2r^3/27 - rs/3 + t = 2$

Reduzierte Form: $y^3 - 3y + 2 = 0$

$D = (p/3)^3 + (q/2)^2 = 0$

$y_1 = -\sqrt[3]{4q} = -2$

$y_2 = \sqrt[3]{q/2} = 1$

$y_3 = \sqrt[3]{q/2} = 1$

$x_1 = y_1 - r/3 = -1$

$x_2 = y_2 - r/3 = 2$

$x_3 = y_3 - r/3 = 2$

Aufgabe 3.11

Normierte Form: $x^3 + 6x^2 + 4x - 8 = 0$

$r = 6,\ s = 4,\ t = -8$

$p = s - r^2/3 = -8$

$q = 2r^3/27 - rs/3 + t = 0$

Reduzierte Form: $y^3 - 8y = y(y^2 - 8) = 0$

$y_1 = 0$

$y_2 = 2\sqrt{2}$

$y_3 = -2\sqrt{2}$

$x_1 = y_1 - r/3 = -2$

$x_2 = y_2 - r/3 = -2 + 2\sqrt{2}$

$x_3 = y_3 - r/3 = -2 - \sqrt{2}$

Aufgabe 3.12

Allgemeine Form: $2x^3 - 3x^2 + 6x - 9 = 0$

$r = b/a = -3/2,\ s = c/a = 3,\ t = d/a = -9/2$

Normierte Form: $x^3 - 3/2x^2 + 3x - 9/2 = 0$

$p = s - r^2/3 = 9/4$

$q = 2r^3/27 - rs/3 + t = -13/4$

Reduzierte Form: $y^3 + 9/4y - 13/4 = 0$

$D = (p/3)^3 + (q/2)^2 = 49/16$

$u = \frac{3}{2}$

$v = -\frac{1}{2}$

$y_1 = u + v = 1$

$y_2 = -\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i} = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$

$y_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i} = -\frac{1}{2} - \sqrt{3}\,\mathrm{i}$

$x_1 = y_1 - \frac{r}{3} = \frac{3}{2}$

$x_2 = y_2 - \frac{r}{3} = \sqrt{3}\,\mathrm{i}$

$x_3 = y_3 - \frac{r}{3} = -\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

Aufgabe 3.13

- 6 reelle Lösungen
- 4 reelle Lösungen und 1 Paar konjugiert komplexer Lösungen
- 2 reelle Lösungen und 2 Paare konjugiert komplexer Lösungen
- 3 Paare konjugiert komplexer Lösungen

Aufgabe 3.16

$2z - \big(4 + \mathrm{i} \cdot \mathrm{Im}(z)\big) = \mathrm{i} \cdot (z - 3) + \frac{1}{5} \cdot \mathrm{Re}(z)$

Ansatz: $z = x + \mathrm{i}\,y$

$2(x + \mathrm{i}\,y) - \big(4 + \mathrm{i}\,y\big) = \mathrm{i} \cdot (x + \mathrm{i}\,y - 3) + \frac{1}{5}x$

$10x + 10y\,\mathrm{i} - 20 - 5y\,\mathrm{i} = 5x\,\mathrm{i} - 5y - 15\,\mathrm{i} + x$

$9x + 5y - 5x\,\mathrm{i} + 5y\,\mathrm{i} = 20 - 15\,\mathrm{i}$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{r} 9x + 5y = 20 \\ -5x + 5y = -15 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = 5/2 \\ y = -1/2 \end{array}$$

$z = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{i}$