Komplexe Zahlen (1) **Lösungen+** **Prüfungsvorbereitung**

Aufgabe 1.1

$z = \mathrm{i}$:

(a) $z^2 = -1$

(b) $z^3 = -\mathrm{i}$

(c) $1/z = -\mathrm{i}$

(d) $z + z^2 = -1 + \mathrm{i}$

(e) $\overline{z} = -\mathrm{i}$

(f) $|z| = 1$

Aufgabe 1.2

$z = 2 - \mathrm{i}$

(a) $z^2 = 3 - 4\mathrm{i}$

(b) $z^3 = 2 - 11\mathrm{i}$

(c) $1/z = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\mathrm{i}$

(d) $z + z^2 = 5 - 5\mathrm{i}$

(e) $\overline{z} = 2 + \mathrm{i}$

(f) $|z| = \sqrt{5}$

Aufgabe 1.3

(a) $\overline{z_1} - \overline{z_2} = \overline{1 - \mathrm{i}} - \overline{4 + 5\mathrm{i}} = (1 + \mathrm{i}) - (4 - 5\mathrm{i}) = -3 + 6\mathrm{i}$

(b) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{(1 - \mathrm{i}) - (4 + 5\mathrm{i})} = \overline{-3 - 6\mathrm{i}} = -3 + 6\mathrm{i}$

(c) $\mathrm{Re}(z_1) \cdot \mathrm{Re}(z_2) = \mathrm{Re}(1 - \mathrm{i}) \cdot \mathrm{Re}(4 + 5\mathrm{i}) = 1 \cdot 4 = 4$

(d) $\mathrm{Re}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Re}\big((1 - \mathrm{i})(4 + 5\mathrm{i})\big) = \mathrm{Re}(4 + 5 + \mathrm{i}) = 9$

(e) $z_1 \cdot \overline{z}_1 = (1 - \mathrm{i})(1 + \mathrm{i}) = 1 + 1 = 2$

(f) $z_1/\overline{z_1} = \dfrac{1 - \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}} = \dfrac{(1 - \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})}{(1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})} = \dfrac{1 - 2\mathrm{i} - 1}{2} = -\mathrm{i}$

Aufgabe 1.4

(a) $\mathrm{i}^{254} = \mathrm{i}^{252} \cdot \mathrm{i}^2 = 1 \cdot (-1) = -1$

(b) $\mathrm{i}^{-573} = 1 \cdot \mathrm{i}^{-571} = \mathrm{i}^{572} \cdot \mathrm{i}^{-571} = \mathrm{i}^{572-571} = \mathrm{i}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{9} \mathrm{i}^k = \underbrace{\mathrm{i}^1 + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^4}_{0} + \underbrace{\mathrm{i}^5 + \mathrm{i}^6 + \mathrm{i}^7 + \mathrm{i}^8}_{0} + \mathrm{i}^9 = \mathrm{i}$

Aufgabe 1.5

(a) $|(1+2\mathrm{i})^8| = |1+2\mathrm{i}|^8 = \sqrt{5}^8 = 625$

(b) $\overline{v+\overline{w}} - \big(\overline{v} + w\big) = \overline{v} + \overline{\overline{w}} - \overline{v} - w$
$= \overline{v} + w - \overline{v} - w = 0$

(c) $(z+1)^2 - (z+\mathrm{i})^2 - 2z(1-\mathrm{i})$
$= z^2 + 2z + 1 - (z^2 - 2\mathrm{i}z - 1) - 2z + 2\mathrm{i}z$
$= z^2 + 2z + 1 - z^2 + 2\mathrm{i}z + 1 - 2z + 2\mathrm{i}z$
$= 2$

(d) $z = a + \mathrm{i}b$
$(a+\mathrm{i}b) + (a-\mathrm{i}b) - a = a = \mathrm{Re}(z)$

Aufgabe 1.6

Koeffizienten: $a = 1$, $b = -2$, $c = 4$

$D = b^2 - 4ac = 4 - 16 = -12 = 12\mathrm{i}^2$

$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{2 + \sqrt{12\mathrm{i}^2}}{2} = \dfrac{2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2} = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$

$x_2 = \cdots = 1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$

Aufgabe 1.7

Setze $z = a + \mathrm{i}b$

links: $|z|^2 = \sqrt{a^2+b^2}^2 = a^2 + b^2$

rechts: $\mathrm{Re}\big((a+\mathrm{i}b)(a+\mathrm{i}b)\big) + 2\,\mathrm{Im}^2(a+\mathrm{i}b)$
$= \mathrm{Re}(a^2 - b^2 + 2\mathrm{i}ab) + 2b^2$
$= a^2 - b^2 + 2b^2 = a^2 + b^2$