Aufgabe 1

(a) ja

(b) nein

(c) ja

(d) nein

Aufgabe 2

(a) $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

(b) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

(c) $1! = 1$

(d) $0! = 1$

Aufgabe 3

(a) $q \circ p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $p \circ q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $r \circ (q \circ p) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $(r \circ q) \circ p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4

(a) $p^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $p^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $p^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = p^0 = \mathrm{id}$

(d) $p^{77} = p^{73} = \cdots = p^5 = p^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5

(a) $p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6

(a) $(\mathbb{N}_0, +)$ ist keine Gruppe (Inverse fehlen)

(b) $(\mathbb{N}, \cdot)$ ist keine Gruppe (Inverse fehlen)

(c) $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe

(d) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist keine Gruppe (Inverse fehlen)

(e) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Gruppe

(f) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, +)$ ist keine Gruppe (Neutralelement fehlt)

(g) $(\mathbb{R}, \cdot)$ ist keine Gruppe (0 hat kein multiplikatives Inverses)

(h) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Gruppe

Aufgabe 7

(a) $(a * c) * d = d * d = b$

Aufgabe 7

(b) Ohne Klammern wird von links nach rechts gerechnet:

$$\begin{aligned}
a^8 &= \underbrace{a * a}_{b} * a * a * a * a * a * a \\
&= \underbrace{b * a}_{a} * a * a * a * a * a \\
&= \underbrace{a * a}_{b} * a * a * a * a \\
&= \underbrace{b * a}_{a} * a * a * a \\
&= \underbrace{a * a}_{b} * a * a \\
&= \underbrace{b * a}_{a} * a \\
&= \underbrace{a * a}_{b} = b
\end{aligned}$$

Aufgabe 7

(c) Die Operation ist nicht kommutativ, denn

$c * d = a$ aber $d * c = b$.

(d) Das Element b ist das Neutralelement, denn es gilt
$b * x = b$ und $x * b = b$ für alle $x \in M$

(e) Die Operation ist nicht assoziativ, denn

$(c * d) * c = a * c = d$ aber $c * (d * c) = c * b = c$

Hier muss man aufs Geratewohl probieren!

Aufgabe 8

(a) Neutralelement: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) Das inverse Element von $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$.

(c) Wegen (a) und (b) ist $(M, +)$ eine Gruppe. Da die Matrizen*addition* assoziativ und kommutativ ist, handelt es sich um eine ablelsche Gruppe.

Aufgabe 9

$$a^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = b$$

$$a^3 = a^2 \cdot a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e$$

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	a	e	a

Aufgabe 10

(a) $5 \equiv 7 \pmod 2$ wahr

(b) $-8 \equiv 12 \pmod{10}$ wahr

(c) $10 \equiv -1 \pmod 3$ falsch

(d) $9 \equiv 9 \pmod 4$ wahr

(e) $m \equiv n \pmod 1$ für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ wahr

Aufgabe 11

Rechnen in $(\mathbb{Z}_6, +)$ und $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$

(a) $\overline{3} + \overline{4} = \overline{1}$ denn $3 + 4 = 7 \in \overline{1}$

(b) $\overline{3} \cdot \overline{4} = \overline{0}$ denn $3 \cdot 4 = 12 \in \overline{0}$

(c) $-\overline{2} = \overline{4}$ denn $4 + 2 = 6 \in \overline{0}$

(d) $\overline{5}^{-1} = \overline{5}$ denn $5 \cdot 5 = 25 = \overline{1}$

(e) $\overline{3}^{-1}$ existiert nicht in $\mathbb{Z}_6$

(f) idempotente Elemente in $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$: $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$

Aufgabe 12

(a) $\overline{3} + \overline{4} = \overline{0}$

(b) $\overline{3} \cdot \overline{4} = \overline{5}$

(c) $-\overline{2} = \overline{5}$, denn $2 + 5 = 7 \in \overline{0}$

(d) $\overline{5}^{-1} = \overline{3}$, denn $5 \cdot 3 = 15 \in \overline{1}$

(e) $\overline{4}^{-1} = \overline{2}$, denn $2 \cdot 4 = 8 \in \overline{1}$

(f) idempotente Elemente in $(\mathbb{Z}_7, \cdot)$: $\overline{0}$, $\overline{1}$

Aufgabe 13

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Aufgabe 14

$\times$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	2	4	6	8	1	3	5	7
3	0	3	6	0	3	6	0	3	6
4	0	4	8	3	7	2	6	1	5
5	0	5	1	6	2	7	3	8	4
6	0	6	3	0	6	3	0	6	3
7	0	7	5	3	1	8	6	4	2
8	0	8	7	6	5	4	3	2	1

Aufgabe 15

Beachte:

- Für jede natürliche Zahl n ist $(\mathbb{Z}_n, +)$ eine Gruppe.
- Für jede Primzahl p ist $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \cdot)$ eine Gruppe
- Es gibt keine $n \in \mathbb{N}$, so dass $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ eine Gruppe ist. Grund: Das Nullelement besitzt kein multiplikatives Inverses.

(a) $(\mathbb{Z}_3 \setminus \{0\}, \cdot)$ Gruppe (3 ist prim, 0 ist raus)

(b) $(\mathbb{Z}_4, +)$ Gruppe

(c) $(\mathbb{Z}_8 \setminus \{0\}, \cdot)$ keine Gruppe (8 ist nicht prim)

(d) $(\mathbb{Z}_{13}, +)$ Gruppe

(e) $(\mathbb{Z}_2, \cdot)$ keine Gruppe (0 hat kein Inverses)

(f) $(\mathbb{Z}_1, \cdot)$ keine Gruppe (0 hat kein Inverses)

Aufgabe 16

Beachte dass bei der Multiplikation das Nullelement der Addition definitionsgemäss aus der Grundmenge ausgeschlossen ist.

(a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ kein Körper

(b) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ Körper

(c) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ Körper

(d) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ Körper

(e) $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ Körper

(f) $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ Körper

(g) $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ kein Körper

(h) $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ Körper

(i) $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ kein Körper

Aufgabe 17

(a)
$$\begin{aligned} x + y &= (a_x + b_x\sqrt{2}) + (a_y + b_y\sqrt{2}) \\ &= (a_x + a_y) + (b_x + b_y)\sqrt{2} \in M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (a_x + b_x\sqrt{2}) \cdot (a_y + b_y\sqrt{2}) \\ &= (a_x a_y + 2b_x b_y) + (a_x b_y + a_y b_x)\sqrt{2} \in M \end{aligned}$$

(b) $-\big(a + b\sqrt{2}\big) = -a - b\sqrt{2}$

(c)
$$\begin{aligned} \big(a + b\sqrt{2}\big)^{-1} &= \frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{\big(a + b\sqrt{2}\big)\big(a - b\sqrt{2}\big)} \\ &= \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{-b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

(d) Es müsste noch gezeigt werden, dass die Addition und die Multiplikation in M assoziativ sind und dass das Distributivgesetzt gilt. Da den Operationen in M die entsprechenden assoziativen Verknüpfungen in $\mathbb{Q}$ zu Grunde liegen, können wir davon ausgehen, dass auch diese Eigenschaften gelten. Zusammen mit (a)–(c) folgt dann, dass $(M, +, \cdot)$ ein Körper ist.