Aufgabe 1

Handelt es sich grundsätzlich um eine Permutation?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Wie viele n-stellige Permutationen gibt es, für ...

(a) $n = 3$ (b) $n = 5$ (c) $n = 1$ (d) $n = 0$

Aufgabe 3

Berechne mit $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(a) $q \circ p$

(b) $p \circ q$

(c) $r \circ (q \circ p)$

(d) $(r \circ q) \circ p$

Aufgabe 4

Berechne für $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(a) p^2 (b) p^3 (c) p^4 (d) p^{77}

wobei $p^2 = p \circ p$, $p^3 = p \circ p \circ p$, usw. bedeutet

Aufgabe 5

Bestimme die inverse Permutationen zu p':

(a) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6

Welche der Paare sind Gruppen? Bei der angegebenen Verknüpfung um die jeweils übliche Operation. Begründe nur, wenn es sich nicht um eine Gruppe handelt.

(a) $(\mathbb{N}_0, +)$

(b) $(\mathbb{N}, \cdot)$

(c) $(\mathbb{Z}, +)$

(d) $(\mathbb{Z}, \cdot)$

(e) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$

(f) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, +)$

(g) $(\mathbb{R}, \cdot)$

(h) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$

Aufgabe 7

Gegeben ist Menge $M = \{a, b, c, d\}$ und die Operation $*$ in Tabellenform.

$*$	a	b	c	d
a	b	a	d	c
b	a	b	c	d
c	d	c	a	a
d	c	d	b	b

(a) Berechne $(a * c) * d$

(b) Berechne a^8

(c) Ist die Operation kommutativ?

(d) Gibt es ein Neutralelement? Wenn ja, um welches Element handelt es sich?

(e) Ist die Operation assoziativ?

Aufgabe 8

Betrachte die Menge aller reellen 2×2-Matrizen

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

mit der üblichen Matrizenaddition $+$.

(a) Gibt es ein neutrales Element? Wenn ja, wie lautet es?

(b) Gibt es zu jeder Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ein inverses Element? Wenn ja, gib es an.

(c) Handelt es sich bei $(M, +)$ um eine Gruppe? Wenn ja, liegt ein Spezialfall vor?

Aufgabe 9

Gegeben ist die Matrix $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Die Potenzen a^n, $n \in \mathbb{N}$ bilden eine endliche Gruppe $(M, \cdot)$ bezüglich der Matrizenmultiplikation.

Bestimme alle Elemente dieser Gruppe, gib ihnen eigene Bezeichnungen (b, c, $\ldots$) und halte die Ergebnisse in einer Verknüpfungstabelle fest.

Aufgabe 10

Wahr oder falsch?

(a) $5 \equiv 7 \pmod 2$

(b) $-8 \equiv 12 \pmod{10}$

(c) $10 \equiv -1 \pmod 3$

(d) $9 \equiv 9 \pmod 4$

(e) $m \equiv n \pmod 1$ für alle m, $n \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 11

Berechne in $\mathbb{Z}_6$

(a) $\overline{3} + \overline{4}$

(b) $\overline{3} \cdot \overline{4}$

(c) das additive Inverse von $\overline{2}$

(d) das multiplikative Inverse von $\overline{5}$

(e) das multiplikative Inverse von $\overline{3}$

(f) alle Restklassen $\overline{r}$ mit $\overline{r}^2 = \overline{r}$ (*idempotente Elemente*)

Aufgabe 12

Berechne in $\mathbb{Z}_7$:

(a) $\overline{3} + \overline{4}$

(b) $\overline{3} \cdot \overline{4}$

(c) das additive Inverse von $\overline{2}$

(d) das multiplikative Inverse von $\overline{5}$

(e) das multiplikative Inverse von $\overline{4}$

(f) alle Restklassen $\overline{r}$ mit $\overline{r}^2 = \overline{r}$

Aufgabe 13

Erstelle eine Verküpfungstabelle für $(\mathbb{Z}_6, +)$

Aufgabe 14

Erstelle eine Verküpfungstabelle für $(\mathbb{Z}_9, \cdot)$

Aufgabe 15

Welche der folgenden Paare sind Gruppen?

(a) $(\mathbb{Z}_3 \setminus \{0\}, \cdot)$

(b) $(\mathbb{Z}_4, +)$

(c) $(\mathbb{Z}_8 \setminus \{0\}, \cdot)$

(d) $(\mathbb{Z}_{13}, +)$

(e) $(\mathbb{Z}_2, \cdot)$

(f) $(\mathbb{Z}_1, \cdot)$

Aufgabe 16

Bei welchen Tripeln handelt es sich um einen Körper?

(a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

(b) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

(c) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

(d) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

(e) $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$

(f) $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$

(g) $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$

(h) $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$

(i) $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$

Aufgabe 17

Gegeben: $M = \{a + b\sqrt{2} \colon a, b \in \mathbb{Q}\}$

(a) Zeige, dass M bezüglich „+“ und „·“ abgeschlossen ist, das heisst, dass für zwei beliebige Elemente $x = a_x + b_x\sqrt{2}$ und $y = a_y + b_y\sqrt{2}$ die Summe $x + y$ und das Produkt $x \cdot y$ wieder in M liegt.

(b) Bestimme die neutralen Elemente von Addition und Multiplikation, sofern es diese gibt.

(c) Bestimme zu $x = a + b\sqrt{2}$ ein allfälliges additives und mulitplikatives Inverses, wobei beim letzeren vorausgesetzt werden darf, dass x nicht das neutrale Elemente der Addition ist.

(d) Handelt es sich um einen Körper?