

**Aufgabe 1**

Eine Permutation ist eine bijektive (umkehrbar eindeutige) Abbildung von  $n$  Elementen auf sich selber.

- (a) ja (d) ja  
(b) ja (e) ja  
(c) nein (f) nein

**Aufgabe 2**

- (a)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (135)(246)$   
(b)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 6 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1)(25)(364)$   
(c)  $(1643)(25) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$   
(d)  $(14)(56)(23) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 3**

- (a)  $q \circ p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$   
(b)  $p \circ q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 4**

- (a)  $q \circ p = (14)(235) \circ (152)(43) = (12453)$   
(b)  $p \circ q = (152)(43) \circ (14)(235) = (13245)$

**Aufgabe 5**

- (a)  $p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$   
(b)  $p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$   
(c)  $p = (14)(235) \Rightarrow p^{-1} = (41)(325) = (14)(253)$

### Aufgabe 6

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(a) p^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(b) p^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

- (c) Für  $p^{2n}$  sind die letzten beiden Elemente Fixpunkte und für  $p^{3n}$  sind die ersten drei Elemente Fixpunkte.

Also gilt:  $p^{6n} = \text{id}$  und damit:

$$p^{59} = p^{53} = \dots = p^5 = p^2 \circ p^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 7

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(a) p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(b) p^{-2} = p^{-1} \circ p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (c) Weiter probieren:

$$p^{-3} = p^{-1} \circ p^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad [\text{verwende z. B. (b)}]$$

$$p^{-4} = p^{-1} \circ p^{-3} \stackrel{\text{oder}}{=} p^{-2} \circ p^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \text{id}$$

$$\text{Also: } p^{-43} = p^{-40} = \dots = p^{-3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 8

Löse die Gleichung „in gewohnter Weise“ nach  $x$  auf:

$$\begin{aligned} a \circ x &= b && \text{|| von links mit } a^{-1} \text{ verknüpfen ...} \\ a^{-1} \circ a \circ x &= a^{-1} \circ b && \text{Assoziativgesetz anwenden ...} \\ (a^{-1} \circ a) \circ x &= a^{-1} \circ b && \text{Eigenschaft des Inversen ...} \\ \text{id} \circ x &= a^{-1} \circ b && \text{Eigenschaft des neutralen Elements ...} \\ x &= a^{-1} \circ b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x &= a^{-1} \circ b \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

### Aufgabe 9

- Abgeschlossenheit:

$\cdot$	$\mathbf{1}$	$-\mathbf{1}$	$\mathbf{i}$	$-\mathbf{i}$
$\mathbf{1}$	1	-1	i	-i
$-\mathbf{1}$	-1	1	-i	i
$\mathbf{i}$	i	-i	-1	1
$-\mathbf{i}$	-i	i	1	-i

- Assoziativität: gilt in  $\mathbb{C}$ ; also auch in  $(M, \cdot)$

- neutrales Element: 1

- inverse Elemente:

$$1^{-1} = 1, (-1)^{-1} = -1, i^{-1} = -i, (-i)^{-1} = i$$

### Aufgabe 10

(a)  $a^2 = a, a^3 = a, \dots, a^{99} = a$

(b)  $b^2 = a$   
 $b^3 = b^2 * b = a * b = b$   
 $b^4 = b^3 * b = b * b = a$   
 $\dots$   
 $b^{99} = b$

(c)  $(a * b)^1 = b$   
 $(a * b)^2 = (a * b) * (a * b) = b * b = a$   
 $(a * b)^3 = (a * b)^2 * (a * b) = a * b = b$   
 $(a * b)^4 = (a * b)^3 * (a * b) = b * b = b$   
 $\dots$   
 $(a * b)^{99} = b$

(d) kommutativ (Die Tabelle ist symmetrisch zur Diagonalen.)

(e) nicht assoziativ  $[(a * c) * b = b \neq a = a * (c * b)]$

### Aufgabe 11

- $*$  ist abgeschlossen: ja (siehe Tabelle)
- $*$  ist assoziativ: ja (nach Voraussetzung)
- neutrales Element:  $a$ , denn nur für  $a$  gilt:  $a * a = a$
- inverse Elemente:  
 $a^{-1} = a$   
 $b^{-1} = b$   
 $c^{-1} = c$   
 $d^{-1} = d$
- abelsch: ja

### Aufgabe 12

- $*$  ist abgeschlossen: ja (siehe Tabelle)
- $*$  ist assoziativ: ja (nach Voraussetzung)
- neutrales Element:  $c$  ist Kandidat, denn für alle  $x \in M$  gilt:  $x * c = c * x$ .
- inverse Elemente:  $a^{-1}$  existiert nicht

Also handelt es sich nicht um eine Gruppe

### Aufgabe 13

$*$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$a$	$b$	$c$	$d$
$b$	$b$	$a$	$d$	$c$
$c$	$c$	$d$	$a$	$b$
$d$	$d$	$c$	$b$	$a$

Wegen  $a * a = a$  muss  $a$  das neutrale Element sein.

In jeder Zeile und Spalte darf ein Element nur einmal vorkommen.

### Aufgabe 14

- (a)  $17 \equiv 39 \pmod{3}$  falsch
- (b)  $-21 \equiv 67 \pmod{4}$  wahr
- (c)  $34 \equiv 254 \pmod{10}$  wahr
- (d)  $-9 \equiv 99 \pmod{10}$  falsch

### Aufgabe 15

- (a)  $[8] + [7] = [4]$   
(b)  $[3] + (-[9]) = [3] + [10] = [2]$   
(c)  $[5] \cdot [8] = [7]$   
(d)  $[6] : [10] = [6] \cdot ([10]^{-1}) = [6] \cdot [10] = [5]$

(Hinweis:  $[r]$  ist eine andre Schreibweise für  $\bar{r}$ )

### Aufgabe 16

- (a)  $[2]^0 = [1]$                       (c)  $[2]^2 = [4]$                       (e)  $[2]^4 = [6]$   
(b)  $[2]^1 = [2]$                       (d)  $[2]^3 = [8]$                       (f)  $[2]^5 = [2]$

(Hinweis:  $[r]$  ist eine andre Schreibweise für  $\bar{r}$ )

### Aufgabe 17

- (a)  $[7]^0 = [1]$                       (c)  $[7]^2 = [9]$                       (e)  $[7]^4 = [1]$   
(b)  $[7]^1 = [7]$                       (d)  $[7]^3 = [3]$                       (f)  $[7]^5 = [7]$

(Hinweis:  $[r]$  ist eine andre Schreibweise für  $\bar{r}$ )

### Aufgabe 18

- (a)  $[3]^{-1} = [2]$                       (d)  $[3]^{-4} = [1]$   
(b)  $[3]^{-2} = [4]$                       (e)  $[3]^{-5} = [2]$   
(c)  $[3]^{-3} = [3]$                       (f)  $[3]^{-103} = [3]^{-3} = [3]$

(Hinweis:  $[r]$  ist eine andre Schreibweise für  $\bar{r}$ )

### Aufgabe 19

neutrales Element:  $a$

Element	Ordnung
$a$	1
$b$	3
$c$	3
$d$	2
$e$	2
$f$	2

## Aufgabe 20

- Ist  $(M, +)$  eine abelsche Gruppe?
  - die Addition ist assoziativ und kommutativ
  - $(0, 0, 0)$  ist das neutrale Element in  $(M, +)$
  - $(-x_1, -x_2, -x_3)$  ist das inverse Element zu  $(x_1, x_2, x_3)$
- $(M, \cdot)$  ist eine abelsche Gruppe:
  - die Multiplikation ist assoziativ und kommutativ
  - $(1, 1, 1)$  ist das neutrale Element in  $(M, \cdot)$
  - Es gibt nicht zu jedem  $(x_1, x_2, x_3) \in M \setminus \{(0, 0, 0)\}$  ein inverses Element. Beispiel:  
 $(2, 3, 0) \neq (0, 0, 0)$  aber  $(2, 3, 0)^{-1}$  existiert nicht.

Also handelt es sich nicht um einen Körper.