Frage 1

Wie rechnet man mit n-stelligen Permutationen?

Da es sich um Abbildungen handelt (die Zahlen 1, 2, ..., n werden umkehrbar eindeutig auf sich selbst abgebildet), verknüpft man Permutationen – wie bei Funktionen üblich – von rechts nach links.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

Frage 2

Was ist eine abgeschlossene Operation?

Eine Operation $*$ auf einer Menge M ist abgeschlossen, wenn für *jedes* Paar $a, b \in M$ die Verknüpfung $a * b$ ein Element von M ist.

- $M = \mathbb{Z}_4 \setminus \{0\} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$

$\cdot$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

  Die Multiplikation ist nicht abgeschlossen in M, da $\overline{0} \notin M$

Frage 3

Inverses Element bei Gruppen?

In jeder Gruppe $(M, *)$ muss es genau ein Element e geben, so dass für jedes $a \in M$ gilt: $e * a = a * e = a$

Beispiele:

- In $(\mathbb{Z}, +)$ ist $e = 0$, denn für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt: $a + 0 = 0 + a = a$
- In $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist $e = 1$, denn für alle $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gilt: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
- In der Menge $M = \{a, b, c\}$ mit der Operation

$*$	x	y	z
x	z	x	y
y	x	y	z
z	y	z	x

  ist y das neutrale Element.

Frage 4

Beispiel einer Nicht-Gruppe in Tabellenform mit Zahlen.

Beispiel von Frage 2:

$M = \mathbb{Z}_4 \setminus \{0\} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$

$\cdot$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Frage 5

Aufgabe 7(b)

$*$	a	b	c	d
a	b	a	d	c
b	a	b	c	d
c	d	c	a	a
d	c	d	b	b

Konvention: Ohne Klammern wird von links nach rechts gerechnet:

$$\begin{aligned}
a^8 &= (a*a)*a*a*a*a*a*a \\
&= b*a*a*a*a*a*a = (b*a)*a*a*a*a*a \\
&= a*a*a*a*a*a = (a*a)*a*a*a*a \\
&= b*a*a*a*a = (b*a)*a*a*a \\
&= a*a*a*a = (a*a)*a*a \\
&= b*a*a = (b*a)*a = a*a = b
\end{aligned}$$

Frage 6

Wann ist eine Gruppe kommutativ?

Eine Operation $*$ in einer Menge M ist kommutativ, wenn für alle $a, b \in M$ gilt: $a*b = b*a$.

Im Falle einer Verknüpfungstabelle muss man „nur“ kontrollieren, ob sie symmetrisch ist:

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

Das „Problem“: Die kleinste nicht-abelsche Gruppe ist die Gruppe der 3-stelligen Permutationen S_3 und diese hat bereits 6 Elemente. Gruppen der Ordnung 5 oder kleiner sind also immer kommutativ.

Frage 7

Was ist ein Körper?

Eine Menge M mit *zwei* Verknüpfungen (die üblicherweise *Addition* und *Multiplikation* genannt werden) und folgenden Eigenschaften (Formelsammlung, S. 24):

- $(M, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element 0.
- $(M \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element 1.
- Es gilt das Distributivgesetz: Für alle $a, b, c \in M$ gilt:

  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Beispiele unendlicher Körper: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Beispiele endlicher Körper: $\mathbb{Z}_p$ (p ist Primzahl)

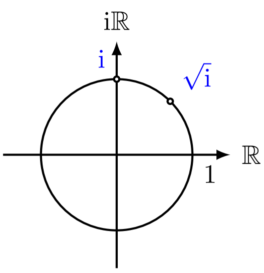
Es wird darauf verzichtet, die Restklassen mit $\overline{r}$ oder $[r]$ zu kennzeichnen.

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Frage 8

Kann man $\sqrt{\mathrm{i}}$ *anders darstellen?*



$$\sqrt{\mathrm{i}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \mathrm{i})$$

Kontrolle: $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \mathrm{i})\right]^2 = \frac{2}{4}(1 + 2\mathrm{i} - 1) = \frac{1}{2} \cdot 2\mathrm{i} = \mathrm{i}$

Frage 9

Logarithmus

Das Logarithmieren ist eine der beiden Umkehrungen des Potenzierens. Man fragt sich, mit welchem Exponenten (Logarithmus) eine gegebene Basis potenziert werden muss, um einen gegebenen Exponenten zu erhalten.

$\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b$

Der Zehnerlogarithmus einer (positiven) Zahl entspricht ungefähr der Anzahl seiner Stellen:

$\log_{10} 57$ liegt zwischen 1 und 2 (1.756)

$\log_{10} 736$ liegt zwischen 2 und 3 (2.867)

$\log_{10} 8\,394\,976$ liegt zwischen 6 und 7

$\log_{10} 0.0000123$ liegt zwischen -4 und -5 (-4.910)