Aufgabe 1

(a) $y^2 = 2px \quad \Rightarrow \quad 16 = 8p \quad \Rightarrow \quad p = 2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 4x$

(b) $p/2 = 6 \quad \Rightarrow \quad p = 12 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 24x$

(c) $p/2 = 2.5 \quad \Rightarrow \quad p = 5 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 10x$

Aufgabe 2

Ersetze x durch $x - u$: $y^2 = 2p(x - u)$

Aufgabe 3

Gleichung der um u verschobenen Parabel: $y^2 = 2p(x - u)$

(a) $P(0, 4)$ in $y^2 = 2p(x + 4)$ einsetzen:

$$16 = 2p(0 + 4)$$
$$p = 2$$
$$\Rightarrow \quad y^2 = 4(x + 4)$$

(b) $P(6, 3)$ in $y^2 = 2p(x - 3)$ einsetzen:

$$9 = 2p(6 - 3)$$
$$p = \tfrac{9}{6} = 1.5$$
$$\Rightarrow \quad y^2 = 3(x - 3)$$

Aufgabe 4

Ellipse: $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

Parabel: $y^2 = 4x$

$$\begin{aligned} 16x^2 + 36y^2 &= 576 \\ 16x^2 + 36 \cdot 4x &= 576 \\ x^2 + 9x - 36 &= 0 \\ (x - 3)(x + 12) &= 0 \\ x_1 &= 3 \\ x_2 &= -12 \quad \text{(unbrauchbar)} \end{aligned}$$

$y^2 = 4 \cdot 3 = 12 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2\sqrt{3}$

$S_1(3, 2\sqrt{3}),\ S_2(3, -2\sqrt{3})$

Aufgabe 5

Parabel: $y^2 = 2x \quad \Rightarrow \quad p = 1$

$x_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad y_0^2 = 2 \cdot x_0 = 4 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 2 > 0$

$x_0 = 2$, $y_0 = 2$ und $p = 1$ in die Tangentengleichung einsetzen:

$2y = 1(x+2) = x + 2 \quad \Rightarrow \quad t\colon y = \frac{1}{2}x + 1$

Aufgabe 6

(a) Parabel: $y^2 = 2x \quad (p = 1)$

$P(-8, 3) \notin$ Parabel Tangentegleichung $\Rightarrow$ Polare

$$y_0 y = p(x + x_0) \quad \Rightarrow \quad 3y = x - 8 \quad \Rightarrow \quad g\colon y = \frac{x-8}{3}$$

Parabel $\cap$ Polare:

$$\begin{aligned} \frac{(x-8)^2}{9} &= 2x \\ (x-8)^2 &= 18x \\ x^2 - 16x + 64 &= 18x \\ x^2 - 34x + 64 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -2$$
$$x_2 = 32 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 8$$

Tangentengleichungen $y_0 y = p(x + x_0)$:

$-2y = x + 2 \quad \Rightarrow \quad t_1\colon y = -\frac{1}{2}x - 1$

$8y = x + 32 \quad \Rightarrow \quad t_2\colon y = \frac{1}{8}x + 4$

(b) Tangentengleichung:

$$y_0 y = p(x + x_0) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{p}{y_0}x + \frac{p x_0}{y_0} = mx + q$$

Koeffizientenvergleich: $m = \dfrac{p}{y_0} = \dfrac{1}{y_0} = 1 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 1$

Parabelgleichung: $y_0^2 = 2px_0 \quad \Rightarrow \quad 1 = 2x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow P(\frac{1}{2}, 1)$

Aufgabe 7

Gleichung der Tangente im Punkt $P(x_0, y_0)$:

$$y_0 y = p(x + x_0) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{p}{y_0}x + \frac{px_0}{y_0}$$

Koeffizientenvergleich mit der Geraden $y = x + 2$:

$$\frac{p}{y_0} \overset{(1)}{=} 1 \quad \text{und} \quad \frac{p \cdot x_0}{y_0} \overset{(2)}{=} 2$$

(1) in (2) einsetzen: $1 \cdot x_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 2$

$x_0 = 2$ in $y = x + 2$ einsetzen: $y_0 = 2 + 2 = 4$

Aus (1) folgt jetzt $p = 4$

Gleichung der gesuchten Parabel: $y^2 = 8x$

Alternative Lösung (Berührbedingung verwenden)

$$\begin{aligned} (x+2)^2 &= 2px \\ x^2 + 4x + 4 &= 2px \\ x^2 + (4 - 2p)x + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Die Graphen $y^2 = 2px$ und $y = x + 2$ haben genau einen Berührpunkt; also gilt $D = 0$.

$$\begin{aligned} (4 - 2p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 &= 0 \\ 16 - 16p + 4p^2 - 16 &= 0 \\ 4p^2 - 16p &= 0 \\ p(p - 4) &= 0 \\ p &= 0 \quad \text{nicht sinnvoll} \\ p &= 4 \end{aligned}$$

$\Rightarrow y^{=}8x$