Aufgabe 1

Koordinatengleichung der Hyperbel: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Asymptotengleichung der Hyperbel: $y = \pm\dfrac{b}{a}x$

(a) $a = 3$, $b = 2$

Hyperbel: $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$;

Asymptote: $y = \pm\dfrac{2}{3}x$

(b) $b = 3$, $c = 4 \quad \Rightarrow \quad a^2 = c^2 - b^2 = 16 - 9 = 7$

Hyperbel: $\dfrac{x^2}{7} - \dfrac{y^2}{9} = 1$;

Asymptote: $y = \pm\dfrac{3}{\sqrt{7}}x = \pm\dfrac{3\sqrt{7}}{7}x$

Der Steigungsquotient der Asymptote wurde mit $\sqrt{7}$ erweitert, damit der Nenner *wurzelfrei* wird.

(c) $P(4,0)$ und $Q(5,3)$ liegen auf der Hyperbel

Setze $x = 4$ und $y = 0$ in die Hyperbelgleichung ein:

$\dfrac{16}{a^2} - \dfrac{0}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{16}{a^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 4$

Setze $x = 5$, $y = 3$ und $a = 4$ in die Hyperbelgleichung ein:

$\dfrac{25}{16} - \dfrac{9}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{9}{b^2} = \dfrac{9}{16} \quad \Rightarrow \quad b = 4$

Hyperbel: $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

Asymptote: $y = \pm\dfrac{4}{4}x = \pm x$

(d) Brennpunkt $F_1(8,0)$, grosse Halbachse $a = 6$

$F_1(c,0) = F_1(8,0) \quad \Rightarrow \quad c = 8$

$b^2 = c^2 - a^2 = 64 - 36 = 28$

Hyperbel: $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{28} = 1$

Asymptote: $y = \pm\dfrac{\sqrt{28}}{6}x = \pm\dfrac{2\sqrt{7}}{6}x = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{3}x$

Aufgabe 2

$H_1\colon \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{64} = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \dfrac{y^2}{16} \overset{(1)}{=} 4$

$H_2\colon x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 \overset{(2)}{=} 1 + \dfrac{y^2}{4}$

Setze (2) in (1) ein: $1 + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{y^2}{16} = 4$

$$\frac{3y^2}{16} = 3$$

$$\frac{y^2}{16} = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 4$$

Setze $y^2 = 16$ in (2) ein: $x^2 = 1 + \dfrac{16}{4} = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{5}$

$H_1 \cap H_2 = \left\{(\sqrt{5}, 4), (\sqrt{5}, -4), (-\sqrt{5}, 4), (-\sqrt{5}, 4)\right\}$

Aufgabe 3

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2}}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} > \sqrt{1+0} = 1$$

Die Abschätzung mit $>$ ist möglich, da $a^2/b^2 > 0$ ist.

Aufgabe 4

$25x^2 - 9y^2 \overset{(*)}{=} 225 \;\Rightarrow\; \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{25} = 1 \;\Rightarrow\; a = 3,\, b = 5$

Die Steigung der Tangente im Hyperbelpunkt $P(x_P, y_P)$ kann durch Umformung der Tangentengleichung bestimmt werden.

$$\frac{x_P x}{9} - \frac{y_P y}{25} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{y_P y}{25} = \frac{x_P x}{9} - 1 \;\Rightarrow\; y = \frac{25x_P}{9y_P}x - \frac{25}{y_P}$$

Aus dem Koeffizientenvergleich mit $y = mx + q$ ergibt sich:

$$m = \frac{25x_P}{9y_P} = 1 \;\Rightarrow\; x_P = \frac{9}{25}y_p$$

Da $P(x_P, y_P) \in$ Hyperbel, müssen x_P und y_P $(*)$ erfüllen:

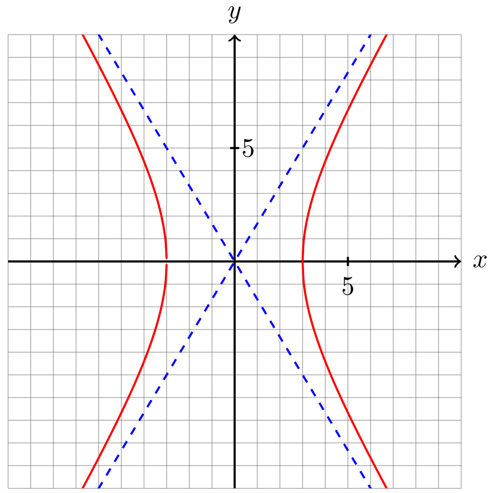
$$25 \cdot \frac{9^2}{25^2} \cdot y_p^2 - 9y_P^2 = 225 \;\Rightarrow\; -\frac{144}{25}y_P^2 = 225 \;\Rightarrow\; \text{keine Lösung}$$

Es gibt keine Hyperbelpunkte mit der Tangentensteigung $m = 1$.

Man hätte dies nach der Bestimmung von $a = 3$ und $b = 5$ durch eine Testrechnung vorwegnehmen können:

Asymptote: $y = \pm\frac{5}{3}$

Da die Steigung einer Tangente an die Hyperbel nicht kleiner als die Steigung der Asymptote sein kann (siehe Abbildung), ist das Weiterrechnen unnötig.



Aufgabe 5

Durch einen Koeffizientenvergleich zwischen den beiden Formen der Tangentengleichung

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{4}{3}x - y = \frac{7}{3} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{4}{7}x - \frac{3}{7}y = 1$$

und

$$\frac{4x}{a^2} - \frac{3y}{b^2} = 1$$

lassen sich die Werte von a und b bestimmen:

$$\frac{4}{a^2} = \frac{4}{7} \quad\Rightarrow\quad a^2 = 7$$

$$\frac{3}{b^2} = \frac{3}{7} \quad\Rightarrow\quad b^2 = 7$$

$\Rightarrow H\colon \frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{7} = 1$

Aufgabe 6

Einsetzen von $y = 2x + q$ in die Hyperbelgleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{9} - \frac{(2x+q)^2}{4} &= 1 \\
4x^2 - 9(2x+q)^2 &= 36 \\
4x^2 - 9(4x^2 + 4qx + q^2) &= 36 \\
-32x^2 - 36qx - 9q^2 - 36 &= 0 \\
32x^2 + 36qx + 9q^2 + 36 &= 0 \\
\alpha x^2 + \beta x + \gamma &= 0
\end{aligned}$$

... hat mindestens Lösung, wenn $D = \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
(36q)^2 - 4 \cdot 32 \cdot (9q^2 + 36) &\geq 0 \\
1296q^2 - 1152q^2 + 4608 &\geq 0 \\
144q^2 - 4608 &\geq 0 \\
q^2 &\geq 32 \\
|q| &\geq \pm 4\sqrt{2}
\end{aligned}$$

(a) für $|q| > 4\sqrt{2}$

(b) für $|q| = 4\sqrt{2}$