Aufgabe 1

(a) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

(b) $c^2 = a^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 9 = 7$

$\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{7} = 1$

(c) $F_1(8, 0) \quad \Rightarrow \quad e = 8$ und $a = 15$

$c^2 = a^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = a^2 - c^2 = 225 - 64 = 161$

$\dfrac{x^2}{225} + \dfrac{y^2}{161} = 1$

Aufgabe 2

(a) $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\dfrac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{\dfrac{a^2}{a^2} - \dfrac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$

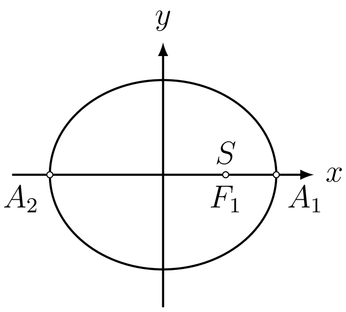
Wegen $a \geq b > 0$ ist $0 < \dfrac{b^2}{a^2} \leq 1$ und damit $0 \leq \varepsilon < 1$.

(b)
- $\varepsilon = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{b^2}{a^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = b$

  Die Ellipse ist ein Kreis.
- $\varepsilon = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{b^2}{a^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$

  Die Ellipse degeneriert zu einer Strecke.

(c) Skizze:



$\overline{A_1F_1} = 1.462 \cdot 10^8 \qquad \overline{A_2F_1} = 1.511 \cdot 10^8$

$2a = \overline{A_1A_2}$

$2a = 1.511 \cdot 10^8 + 1.462 \cdot 10^8$

$2a = 2.973 \cdot 10^8$

$a = 1.4865 \cdot 10^8$

$c = a - \overline{A_1F_1} = 2.45 \cdot 10^6 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \dfrac{c}{a} = 0.0165$

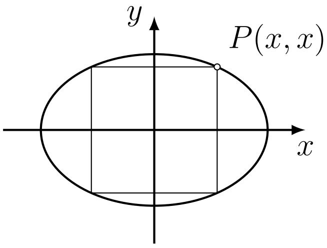
Aufgabe 3

Setze $a = 4$, $x = 2$ und $y = 1$ in die Koordinatengleichung der Ellipse ein:

$$\frac{2^2}{4^2} + \frac{1^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{4}{16} + \frac{1}{b^2} = 1$$
$$\frac{1}{b^2} = \frac{3}{4}$$
$$b^2 = \frac{4}{3}$$
$$b = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Aufgabe 4

Für ein Quadrat muss der Eckpunkt P gleiche Koordinaten haben.



$$\frac{x^2}{36} + \frac{x^2}{16} = 1$$
$$4x^2 + 9x^2 = 144$$
$$13x^2 = 144$$
$$x = \frac{12\sqrt{13}}{13}$$
$$s = 2x = \frac{24\sqrt{13}}{13} \approx 6.656$$

Aufgabe 5

Setze die Gleichung der Geraden ($y = 2x - 1$) in die Gleichung der Ellipse ($9x^2 + 25y^2 = 225$) ein:

$$9x^2 + 25(2x-1)^2 = 225$$
$$9x^2 + 25(4x^2 - 4x + 1) = 225$$
$$109x^2 - 100x - 200 = 0$$
$$x_1 = -0.971 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -2.943$$
$$x_2 = 1.889 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 2.778$$

$P_1(-0.971, -2.943)$, $P_2(1.889, 2.778)$

Aufgabe 6

Setze $y_0 = \frac{1}{2}$ in die Koordinatengleichung der Ellipse ein:

$$x_0^2 + 25 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad x_0^2 = \frac{75}{4} \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

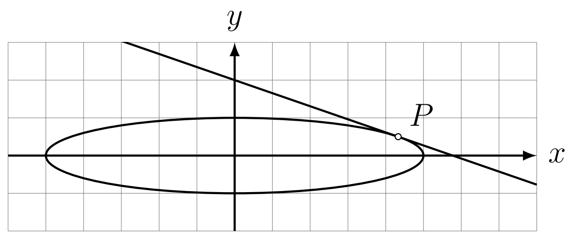
$$x^2 + 25y^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 5,\ b = 1$$

Setze $a = 5$, $b = 1$, $x_0 = \frac{5}{2}\sqrt{3}$, $y_0 = \frac{1}{2}$ in die Tangentengleichung der Ellipse ein:

$$\frac{x_0 x}{25} + \frac{y_0 y}{1} = 1$$

$$\frac{5\sqrt{3}\,x}{2 \cdot 25} + \frac{y}{2} = 1 \quad || \cdot 10$$

$t\colon 2\sqrt{3}x + 5y = 20$



Aufgabe 7

Entweder die Koordinatengleichung auf Normalform bringen:

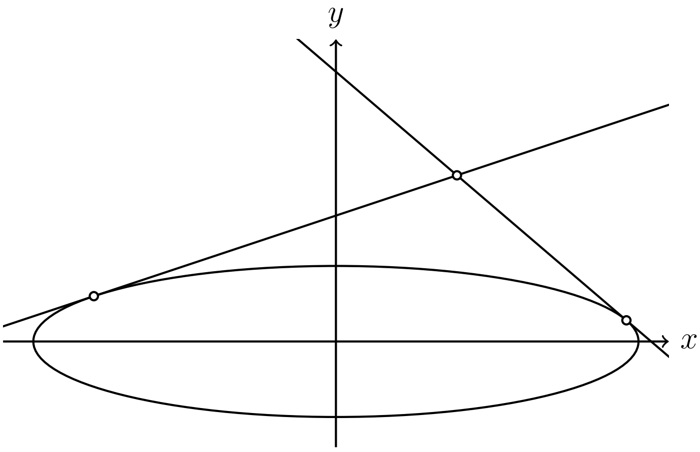
$$25x^2 + 400y^2 = 10^4 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{25} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 20,\, b = 5$$

oder die Polarengleichung aus der gegebenen Gleichung herleiten:

$$25x_0x + 400y_0y = 10^4 \quad \Rightarrow \quad t\colon x_0x + 16y_0y = 400$$

In diese Gleichung setzen wir den Punkt $P(8, 11)$ ein:

$$8x + 176y = 400 \quad \Rightarrow \quad x + 22y = 50 \quad \Rightarrow \quad p\colon x = 50 - 22y$$



Schneide die Polare mit der Ellipse:

$$\begin{aligned}
25(50-22y)^2 + 400y^2 &= 10^4 \\
(50-22y)^2 + 16y^2 &= 400 \\
2500 - 2200y + 484y^2 + 16y^2 &= 400 \\
500y^2 - 2200y + 2100 &= 0 \\
5y^2 - 22y + 21 &= 0 \\
y_1 = 3 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = -16 \\
y_2 = 1.4 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = 19.2
\end{aligned}$$

$B_1(3, -16)$ und $B_2(1.4, 19.2)$ in t einsetzen:

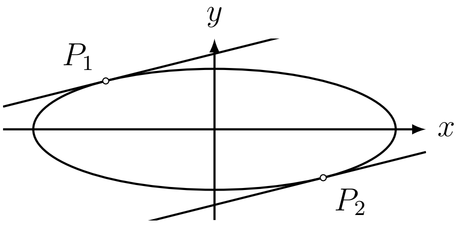
$$t_1\colon \frac{3}{400}x - \frac{16}{25}y = 1$$

$$t_2\colon \frac{1.4}{400}x - \frac{19.2}{25}y = 1 \quad \Rightarrow \quad t_2\colon \frac{7}{2000}x - \frac{48}{625}y = 1$$

Aufgabe 8

Ellipsengleichung auf Normalform bringen:

$$4x^2 + 36y^2 = 144 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 6,\ b = 2$$



Steigung der Tangente an eine Ellipse in einem Kurvenpunkt $P(x, y)$:

$$m = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} = -\frac{4}{36} \cdot \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{4}{9}x$$

Setze $y = -\frac{4}{9}x$ in die Ellipsengleichung ein:

$$4x^2 + 36\left(-\frac{4}{9}x\right)^2 = 144$$

$$\begin{aligned}
4x^2 + 36 \cdot \frac{16}{81}x^2 &= 144 \quad || : 4 \\
x^2 + \frac{16}{9}x^2 &= 36 \quad || \cdot 9 \\
9x^2 + 16x^2 &= 324 \\
25x^2 &= 324 \\
5x &= \pm 18 \\
x_1 = \tfrac{18}{5} \quad &\Rightarrow \quad y_1 = -\tfrac{8}{5} \quad \Rightarrow \quad P_1(\tfrac{18}{5}, -\tfrac{8}{5}) \\
x_2 = -\tfrac{18}{5} \quad &\Rightarrow \quad y_2 = \tfrac{8}{5} \quad \Rightarrow \quad P_1(-\tfrac{18}{5}, \tfrac{8}{5})
\end{aligned}$$

Da wir jetzt die Berührpunkte (Tangentenpunkte) kennen, können wir die Tangentengleichung der Ellipse verwenden:

$$\frac{18}{5 \cdot 36}\,x - \frac{8}{5 \cdot 4}\,y = 1 \quad \Rightarrow \quad t_1\colon \frac{1}{10}\,x - \frac{2}{5}\,y = 1$$

$$-\frac{18}{5 \cdot 36}\,x + \frac{8}{5 \cdot 4}\,y = 1 \quad \Rightarrow \quad t_2\colon -\frac{1}{10}\,x + \frac{2}{5}\,y = 1$$

Oder in der Steigungs-Ordinatenabschnitts-Form:

$$t_1\colon y = \frac{1}{4}\,x - \frac{5}{2}$$

$$t_2\colon y = -\frac{1}{4}\,x + \frac{5}{2}$$

Aufgabe 9

$P(3, y)$ liegt sowohl auf der Gerade als auch auf der Ellipse. Daher setzen wir $x = 3$ in die Geradengleichung (=Tangentengleichung) $y = 0.6x - 5$ ein:

$$y = 0.6 \cdot 3 - 5 = -3.2 \quad \Rightarrow \quad P(3, -3.2)$$

Um eine erste Gleichung für die Halbachsen a und b zu erhalten, setzen wir die Koordinaten des Punktes $P(3, -3.2)$ in die Ellipsengleichung ein:

$$\frac{9}{a^2} + \frac{10.24}{b^2} = 1 \quad (1)$$

Die zweite Gleichung für a und b bekommen wir, indem wir die Tangentensteigung $m = 0.6$ zusammen mit den Koordinaten von P in die Gleichung für die Tangentensteigung der Ellipse einsetzen:

$$0.6 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{3}{(-3.2)} \quad \Rightarrow \quad b^2 = 0.64a^2 \quad (2)$$

Setzen wir (2) in (1) ein, ergibt dies

$$\begin{aligned} \frac{9}{a^2} + \frac{10.24}{b^2} &= 1 \\ \frac{9}{a^2} + \frac{10.24}{0.64a^2} &= 1 \\ \frac{9}{a^2} + \frac{16}{a^2} &= 1 \\ \frac{25}{a^2} &= 1 \\ a &= 5 \end{aligned}$$

$a = 5$ in (2) einsetzen: $b^2 = 0.64 \cdot 25 = 16 \quad \Rightarrow \quad b = 4.$