

# Das Stable Marriage Problem (SMP)

# Die Ausgangslage

Aus einer Menge  $F$  von  $n$  heiratswilligen Frauen und einer Menge  $M$  von  $n$  ebensolchen Männern sollen Paare gebildet werden. Dabei wird vorausgesetzt, dass jede Frau und jeder Mann über eine Rangliste verfügt, aus der eindeutig hervorgeht, welche(n) der potenziellen Partner er am liebsten, zweitliebsten, ... heiraten möchte.

Dabei darf es keine **instabilen** Paare geben. Das sind Paare  $(f_1, m_1)$  und  $(f_2, m_2)$ , bei denen die Frau  $f_1$  ihren Partner  $m_1$  für den Mann  $m_2$  verlassen würde **und** der Mann  $m_1$  seine Partnerin  $f_1$  für die Frau  $f_2$  verlassen würde.

# Fragen



1. Gibt es immer eine Lösung, bei der jeder Mann eine Partnerin bzw. jede Frau einen Partner findet und bei der es keine instabilen Paare gibt?
2. Wie kann eine solche Lösung algorithmisch gefunden werden?
3. Gibt es eine „optimale“ Lösung; d. h. eine Lösung, bei der jede Person ihren bestmöglichen Partner findet?

## Antwort auf Frage 2

Ja, mit dem Algorithmus von Gale-Shapley<sup>1</sup>:

1. Stelle alle Männer in eine Warteschlange
2. Wiederhole, bis die Warteschlange leer ist:
  - 2.1 Nimm den nächsten Mann  $m$  aus der Warteschlange.
  - 2.2  $m$  wählt die nächsten Frau  $f$  auf seiner Liste und streicht dort ihren Namen durch.
  - 2.3  $m$  fragt  $f$ : Hast du bereits einen Verlobten  $m'$ ?
    - 2.3.1 Nein:  $m$  verlobt sich mit  $f$ .
    - 2.3.2 Ja: Findet  $f$  den Mann  $m$  besser als  $m'$ ?
      - 2.3.2.1 Nein:  $m$  macht bei 2.2 weiter.
      - 2.3.2.2 Ja:  $f$  trennt sich von  $m'$ , verlobt sich mit  $m$  und schickt den "Ex"  $m'$  in die Warteschlange zurück.

Natürlich funktioniert der Algorithmus auch bei Damenwahl.

<sup>1</sup> Gale, David and Shapley, Lloyd. „College Admissions and the Stability of Marriage.“ *American Mathematical Monthly*, 1962,   

# Beispiel 1 (Herrenwahl)

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Alex</b>	Cora	Ann	Betsy
<b>Ben</b>	Cora	Betsy	Ann
<b>Carl</b>	Cora	Betsy	Ann

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Ann</b>	Carl	Ben	Alex
<b>Betsy</b>	Carl	Alex	Ben
<b>Cora</b>	Carl	Ben	Alex

Queue:

## Beispiel 1 (Herrenwahl)

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Alex</b>	Cora	Ann	Betsy
<b>Ben</b>	Cora	Betsy	Ann
<b>Carl</b>	Cora	Betsy	Ann

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Ann</b>	Carl	Ben	Alex
<b>Betsy</b>	Carl	Alex	Ben
<b>Cora</b>	Carl	Ben	Alex

Queue: **Alex Ben Carl**

## Beispiel 1 (Herrenwahl)

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Alex</b>	<del>Cora</del>	Ann	Betsy
<b>Ben</b>	Cora	Betsy	Ann
<b>Carl</b>	Cora	Betsy	Ann

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Ann</b>	Carl	Ben	Alex
<b>Betsy</b>	Carl	Alex	Ben
<b>Cora</b>	Carl	Ben	Alex

Queue: ~~Alex~~ Ben Carl

Alex – Cora

## Beispiel 1 (Herrenwahl)

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Alex</b>	<del>Cora</del>	Ann	Betsy
<b>Ben</b>	<del>Cora</del>	Betsy	Ann
<b>Carl</b>	Cora	Betsy	Ann

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Ann</b>	Carl	Ben	Alex
<b>Betsy</b>	Carl	Alex	Ben
<b>Cora</b>	Carl	Ben	Alex

Queue: ~~Alex~~ ~~Ben~~ Carl Alex

~~Alex~~ — Cora

Ben — Cora



## Beispiel 1 (Herrenwahl)

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Alex</b>	<del>Cora</del>	Ann	Betsy
<b>Ben</b>	<del>Cora</del>	Betsy	Ann
<b>Carl</b>	<del>Cora</del>	Betsy	Ann

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Ann</b>	Carl	Ben	Alex
<b>Betsy</b>	Carl	Alex	Ben
<b>Cora</b>	Carl	Ben	Alex

Queue: ~~Alex~~ ~~Ben~~ ~~Carl~~ Alex Ben

~~Alex~~ — ~~Cora~~

~~Ben~~ — ~~Cora~~

Carl — Cora

## Beispiel 1 (Herrenwahl)

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Alex</b>	<del>Cora</del>	<del>Ann</del>	Betsy
<b>Ben</b>	<del>Cora</del>	Betsy	Ann
<b>Carl</b>	<del>Cora</del>	Betsy	Ann

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Ann</b>	Carl	Ben	Alex
<b>Betsy</b>	Carl	Alex	Ben
<b>Cora</b>	Carl	Ben	Alex

Queue: ~~Alex~~ ~~Ben~~ ~~Carl~~ Alex Ben

~~Alex~~ — Cora

~~Ben~~ — Cora

Carl — Cora

Alex — Ann

## Beispiel 1 (Herrenwahl)

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Alex</b>	<del>Cora</del>	<del>Ann</del>	Betsy
<b>Ben</b>	<del>Cora</del>	<del>Betsy</del>	Ann
<b>Carl</b>	<del>Cora</del>	Betsy	Ann

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Ann</b>	Carl	Ben	Alex
<b>Betsy</b>	Carl	Alex	Ben
<b>Cora</b>	Carl	Ben	Alex

Queue: ~~Alex~~ ~~Ben~~ ~~Carl~~ Alex Ben

~~Alex~~ — Cora

~~Ben~~ — Cora

Carl — Cora

Alex — Ann

Ben — Betsy

## Beispiel 2 (Damenwahl)

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Ann</b>	Carl	Ben	Alex
<b>Betsy</b>	Carl	Alex	Ben
<b>Cora</b>	Carl	Ben	Alex

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Alex</b>	Cora	Ann	Betsy
<b>Ben</b>	Cora	Betsy	Ann
<b>Carl</b>	Cora	Betsy	Ann

Queue:

## Beispiel 2 (Damenwahl)

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Ann</b>	Carl	Ben	Alex
<b>Betsy</b>	Carl	Alex	Ben
<b>Cora</b>	Carl	Ben	Alex

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Alex</b>	Cora	Ann	Betsy
<b>Ben</b>	Cora	Betsy	Ann
<b>Carl</b>	Cora	Betsy	Ann

Queue: **Ann Betsy Cora**

## Beispiel 2 (Damenwahl)

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Ann</b>	<del>Carl</del>	Ben	Alex
<b>Betsy</b>	Carl	Alex	Ben
<b>Cora</b>	Carl	Ben	Alex

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Alex</b>	Cora	Ann	Betsy
<b>Ben</b>	Cora	Betsy	Ann
<b>Carl</b>	Cora	Betsy	Ann

Queue: ~~Ann~~ Betsy Cora

Ann – Carl

## Beispiel 2 (Damenwahl)

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Ann</b>	<del>Carl</del>	Ben	Alex
<b>Betsy</b>	<del>Carl</del>	Alex	Ben
<b>Cora</b>	Carl	Ben	Alex

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Alex</b>	Cora	Ann	Betsy
<b>Ben</b>	Cora	Betsy	Ann
<b>Carl</b>	Cora	Betsy	Ann

Queue: ~~Ann~~ ~~Betsy~~ Cora Ann

~~Ann~~ — Carl

Betsy — Carl

## Beispiel 2 (Damenwahl)

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Ann</b>	<del>Carl</del>	Ben	Alex
<b>Betsy</b>	<del>Carl</del>	Alex	Ben
<b>Cora</b>	<del>Carl</del>	Ben	Alex

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Alex</b>	Cora	Ann	Betsy
<b>Ben</b>	Cora	Betsy	Ann
<b>Carl</b>	Cora	Betsy	Ann

Queue: ~~Ann~~ ~~Betsy~~ ~~Cora~~ Ann Betsy

~~Ann~~ — Carl

~~Betsy~~ — Carl

Cora — Carl



## Beispiel 2 (Damenwahl)

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Ann</b>	<del>Carl</del>	<del>Ben</del>	Alex
<b>Betsy</b>	<del>Carl</del>	Alex	Ben
<b>Cora</b>	<del>Carl</del>	Ben	Alex

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Alex</b>	Cora	Ann	Betsy
<b>Ben</b>	Cora	Betsy	Ann
<b>Carl</b>	Cora	Betsy	Ann

Queue: ~~Ann~~ ~~Betsy~~ ~~Cora~~ Ann Betsy

~~Ann~~ — Carl

~~Betsy~~ — Carl

Cora — Carl

Ann — Ben

## Beispiel 2 (Damenwahl)

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Ann</b>	<del>Carl</del>	<del>Ben</del>	Alex
<b>Betsy</b>	<del>Carl</del>	<del>Alex</del>	Ben
<b>Cora</b>	<del>Carl</del>	Ben	Alex

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Alex</b>	Cora	Ann	Betsy
<b>Ben</b>	Cora	Betsy	Ann
<b>Carl</b>	Cora	Betsy	Ann

Queue: ~~Ann~~ ~~Betsy~~ ~~Cora~~ ~~Ann~~ ~~Betsy~~

~~Ann~~ — Carl

~~Betsy~~ — Carl

Cora — Carl

Ann — Ben

Betsy — Alex

## Antwort auf Frage 1

**Satz 1:** *Mit dem Verfahren von Gale-Shapley kann jeder Frau [jedem Mann] genau ein Partner [eine Partnerin] zugeordnet werden.*

# Antwort auf Frage 1

**Satz 1:** *Mit dem Verfahren von Gale-Shapley kann jeder Frau [jedem Mann] genau ein Partner [eine Partnerin] zugeordnet werden.*

*Beweis:* So lange es noch Frauen gibt, die von keinem Mann einen Antrag erhalten haben, bewerben sich mehr Männer, um die Gunst von weniger Frauen.

## Antwort auf Frage 1

**Satz 1:** *Mit dem Verfahren von Gale-Shapley kann jeder Frau [jedem Mann] genau ein Partner [eine Partnerin] zugeordnet werden.*

*Beweis:* So lange es noch Frauen gibt, die von keinem Mann einen Antrag erhalten haben, bewerben sich mehr Männer, um die Gunst von weniger Frauen.

Dieser Mangel an Frauen führt beim oben beschriebenen Verfahren dazu, dass einige Frauen die für sie weniger attraktiven Bewerber zurückweisen. Da diese Männer derselben Frau kein zweites Mal einen Antrag machen dürfen, müssen sie um andere Frauen werben.

Früher oder später erhält so jede Frau einen Antrag. (Wurde einer Frau einmal ein Antrag gemacht, kann sie höchstens noch zu einem für sie besseren Partner wechseln. Sie bleibt aber verlobt.)  $\square$

**Satz 2:** *Das Verfahren von Gale und Shapley führt immer zu einem stabilen Matching.*

*Beweis:* Angenommen John und Mary wären kein Paar aber mögen sich so sehr, dass beide ihre aktuellen Partner verlassen würden. In diesem Falle wäre John aber nur deshalb mit seiner derzeitigen Partnerin zusammen, weil Mary früher seinen Antrag aufgrund ihres aktuellen Partners abgelehnt hat oder weil Mary ihn wegen ihres aktuellen Partners verlassen hat. Somit können John und Mary kein instabiles Paar sein. □

## Beispiel 3

Bestimme die stabilen Paarungen nach dem Verfahren von Gale-Shapley jeweils bei Herren- und bei Damenwahl.

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Alex</b>	Betsy	Cora	Ann
<b>Ben</b>	Cora	Ann	Betsy
<b>Carl</b>	Ann	Betsy	Cora

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Ann</b>	Alex	Ben	Carl
<b>Betsy</b>	Ben	Carl	Alex
<b>Cora</b>	Carl	Alex	Ben

Herrenwahl:

Damenwahl:

## Beispiel 3

Bestimme die stabilen Paarungen nach dem Verfahren von Gale-Shapley jeweils bei Herren- und bei Damenwahl.

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
Alex	Betsy	Cora	Ann
Ben	Cora	Ann	Betsy
Carl	Ann	Betsy	Cora

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
Ann	Alex	Ben	Carl
Betsy	Ben	Carl	Alex
Cora	Carl	Alex	Ben

Herrenwahl:

Alex + Betsy

Damenwahl:



## Beispiel 3

Bestimme die stabilen Paarungen nach dem Verfahren von Gale-Shapley jeweils bei Herren- und bei Damenwahl.

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Alex</b>	<b>Betsy</b>	Cora	Ann
<b>Ben</b>	<del>Cora</del>	Ann	Betsy
<b>Carl</b>	Ann	Betsy	Cora

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Ann</b>	Alex	Ben	Carl
<b>Betsy</b>	Ben	Carl	Alex
<b>Cora</b>	Carl	Alex	Ben

Herrenwahl:

Alex + Betsy

Ben + Cora

Damenwahl:

## Beispiel 3

Bestimme die stabilen Paarungen nach dem Verfahren von Gale-Shapley jeweils bei Herren- und bei Damenwahl.

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Alex</b>	<b>Betsy</b>	Cora	Ann
<b>Ben</b>	<del>Cora</del>	Ann	Betsy
<b>Carl</b>	<del>Ann</del>	Betsy	Cora

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Ann</b>	Alex	Ben	Carl
<b>Betsy</b>	Ben	Carl	Alex
<b>Cora</b>	Carl	Alex	Ben

Herrenwahl:

Alex + Betsy

Ben + Cora

Carl + Ann

Damenwahl:

## Beispiel 3

Bestimme die stabilen Paarungen nach dem Verfahren von Gale-Shapley jeweils bei Herren- und bei Damenwahl.

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Alex</b>	<b>Betsy</b>	Cora	Ann
<b>Ben</b>	<del>Cora</del>	Ann	Betsy
<b>Carl</b>	<del>Ann</del>	Betsy	Cora

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Ann</b>	<b>Alex</b>	Ben	Carl
<b>Betsy</b>	Ben	Carl	Alex
<b>Cora</b>	Carl	Alex	Ben

Herrenwahl:

Alex + Betsy

Ben + Cora

Carl + Ann

Damenwahl:

Ann + Alex

## Beispiel 3

Bestimme die stabilen Paarungen nach dem Verfahren von Gale-Shapley jeweils bei Herren- und bei Damenwahl.

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Alex</b>	<b>Betsy</b>	Cora	Ann
<b>Ben</b>	<del>Cora</del>	Ann	Betsy
<b>Carl</b>	<del>Ann</del>	Betsy	Cora

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Ann</b>	<b>Alex</b>	Ben	Carl
<b>Betsy</b>	<b>Ben</b>	Carl	Alex
<b>Cora</b>	Carl	Alex	Ben

Herrenwahl:

Alex + Betsy

Ben + Cora

Carl + Ann

Damenwahl:

Ann + Alex

Betsy + Ben

## Beispiel 3

Bestimme die stabilen Paarungen nach dem Verfahren von Gale-Shapley jeweils bei Herren- und bei Damenwahl.

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Alex</b>	<b>Betsy</b>	Cora	Ann
<b>Ben</b>	<del>Cora</del>	Ann	Betsy
<b>Carl</b>	<del>Ann</del>	Betsy	Cora

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Ann</b>	<b>Alex</b>	Ben	Carl
<b>Betsy</b>	<b>Ben</b>	Carl	Alex
<b>Cora</b>	<del>Carl</del>	Alex	Ben

Herrenwahl:

Alex + Betsy

Ben + Cora

Carl + Ann

Damenwahl:

Ann + Alex

Betsy + Ben

Cora + Carl

## Beispiel 3

Bestimme die stabilen Paarungen nach dem Verfahren von Gale-Shapley jeweils bei Herren- und bei Damenwahl.

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Alex</b>	<del>Betsy</del>	Cora	Ann
<b>Ben</b>	<del>Cora</del>	Ann	Betsy
<b>Carl</b>	<del>Ann</del>	Betsy	Cora

	1. Priorität	2. Priorität	3. Priorität
<b>Ann</b>	<del>Alex</del>	Ben	Carl
<b>Betsy</b>	<del>Ben</del>	Carl	Alex
<b>Cora</b>	<del>Carl</del>	Alex	Ben

Herrenwahl:

Alex + Betsy

Ben + Cora

Carl + Ann

Damenwahl:

Ann + Alex

Betsy + Ben

Cora + Carl

*Beobachtung:* Die Antragssteller bekommen ihre erste Wahl; die Antragsempfänger ihre dritte Wahl.

## Antwort auf Frage 3

*Die wählende Gruppe bekommen mit dem Verfahren von Gale-Shapley jeweils ihre bestmögliche Wahl.*

Wir gehen davon aus, dass die Männer den Frauen Anträge machen. (Der umgekehrte Fall geht wieder analog.)

Angenommen ein Mann  $m$  wäre *nicht* mit der für ihn bestmöglichen Frau  $f$  zusammen sondern mit der Frau  $f'$ .

Dann müsste er aber während der Brautwerbungsphase der Frau  $f$  vor seiner aktuellen Partnerin  $f'$  einen Antrag gemacht haben.

Wie in der Antwort auf Frage 1 müsste  $f$  dann aber  $m$  wegen eines für sie attraktiveren Mannes abgewiesen oder verlassen haben.

Somit hat  $m$  unter den gegebenen Umständen die für ihn beste Partnerin gefunden.

## Die ursprüngliche Anwendung

Die ursprüngliche Absicht von Gale und Shapley war, eine Lösung für das Problem zu finden, den amerikanischen Colleges eine maximale Zahl möglichst gut qualifizierte Schulabgänger zuzuführen, die umgekehrt gewillt waren, an diesen Colleges zu studieren.

Das „Problem der stabilen Paarung“ diente dazu, als Spezialfall den von den Autoren gefundenen Lösungsansatz zu veranschaulichen.



## Eine aktuelle Anwendung

Im Internet fordern heute Milliarden von Benutzern (*Clients*) unterschiedliche Dienste, wie Webseiten, Videos oder Mails an.

Diese Dienste werden von speziellen Computern (Servern) erbracht, die sich in unterschiedlichen Regionen befinden und durch eigene Netzwerke zusammengeschlossen sind. Solche Netzwerke, werden *Content Delivery Networks (CDN)* genannt.

In dieser Situation ist es im Interesse der Clients, die Dienste eines Servers anzufordern, der möglichst schnell reagiert; also möglichst „nahe“ ist. Daraus ergibt sich eine Präferenzliste für die Clients.

Umgekehrt ist es auch im Interesse der Server, diejenigen Clients mit kurzen Antwortzeiten zu bedienen, um die Kosten zu minimieren, was zu einer Präferenzliste der Server führt.

Somit ergibt sich das Problem die passenden Clients und Server „zusammenzubringen“. Dabei spielt die von Gale und Shapley entwickelte Theorie eine wichtige Rolle.

# Nachtrag

Lloyd Shapley erhielt zusammen mit Alvin Roth im Jahr 2012 den Alfred-Nobel-Gedächtnispreis für Wirtschaftswissenschaften der Schwedischen Reichsbank.

*„for the theory of stable allocations and the practice of market design“.*

<https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/2012/press-release/>