Aufgabe 1

Bestimme für die Orthgonalbasis

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 13 \\ -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 34 \\ 98 \\ -12 \\ -11 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -38 \\ 14 \\ 69 \\ -68 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 22 \\ 26 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^4$ die die Lösung der Gleichung

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 + a_4\vec{v}_4 = \vec{w}$$

mit $\vec{w} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2

Das Skalarprodukt von zwei reellen Funktion f und g, die stetig auf dem Intervall $I = [0, 1]$ sind, sei wie folgt definiert:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

(a) Prüfe, ob die Funktionen $f(x) = x^3 - 8x + 4$ und $g(x) = x^2 + 2$ orthogonal sind.

(b) Bestimme den Betrag $|f|$ der Funktion $f(x) = x^2 + 6x - 3$.

(c) Berechne den Winkel φ zwischen den Funktionen $f(x) = x + 2$ und $g(x) = 2x - 1$ bezüglich des .

Aufgabe 3

Die Laguerre-Polynome L_n werden wie folgt definiert

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(-1)^k}{k!} \cdot x^k$$

und treten unter anderem bei der numerischen Berechnung bestimmter Integrale als auch in der Quantenmechanik auf.

(a) Weise nach, dass $L_0(x) = 1$ und $L_1(x) = 1 - x$ gilt.

(b) Bestimme $L_2(x)$.

(c) Zeige, dass $L_0(x)$ und $L_1(x)$ bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

orthogonal sind. (e^{-x} sorgt für die Konvergenz des uneigentlichen Integrals.)

Aufgabe 4

Gegeben: $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(a) Zeige, dass $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ linear unabhängig sind indem du den Rang der Matrix bestimmst, die sich aus den drei Vektoren zusammensetzt.

(b) Bestimme mit dem Verfahren von Gram-Schmidt aus $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ eine orthogonale Basis $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$.

(c) Gib die zu $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ gehörende orthonormale Basis $\vec{c}_1$, $\vec{c}_2$, $\vec{c}_3$ an.

Aufgabe 5

Gegeben: $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(a) Zeige, dass $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ linear unabhängig sind indem du den Rang der Matrix bestimmst, die sich aus den drei Vektoren zusammensetzt.

(b) Bestimme mit dem Verfahren von Gram-Schmidt aus $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ eine orthogonale Basis $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$.

(c) Gib die zu $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ gehörende orthonormale Basis $\vec{c}_1$, $\vec{c}_2$, $\vec{c}_3$ an.