Orthogonale Vektoren und Funktionen

Orthogonal- und Orthonormalsysteme

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Alle drei Vektoren stehen paarweise senkrecht zueinander, denn

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0 \quad \text{für alle } i,\, j \in \{1, 2, 3\} \text{ mit } i \neq j$$

Eine Menge paarweise orthogonaler Vektoren wird *Orthogonalsystem* genannt.

Haben die Vektoren zudem alle die Länge 1, so handelt es sich um eine *Orthonormalsystem*.

Falls das Orthogonalsystem aus n Vektoren des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ besteht, spricht man von einer *Orthogonalbasis*. Bei einem Orthonormalsystem entsprechend von einer *Orthonormalbasis*.

Lösen von Gleichungen in Orthogonalsystemen

Eine Gleichung der Form

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 = \vec{w}$$

lässt sich in einer Orthogonalbasis äusserst einfach nach a_1, a_2 und a_3 lösen, indem man es einzeln mit den Vektoren der Basis multipliziert:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \cdot [a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3] &= \vec{v}_1 \cdot \vec{w} \\ a_1\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \underbrace{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1}_{0} + a_3 \underbrace{\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1}_{0} &= \vec{v}_1 \cdot \vec{w} \\ a_1 &= \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{w}}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \end{aligned}$$

Analog:

$$a_2 = \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{w}}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2} \quad \text{und} \quad a_3 = \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{w}}{\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_3}$$

Aufgabe 1

Gegeben eine Orthgonalbasis in $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 13 \\ -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 34 \\ 98 \\ -12 \\ -11 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -38 \\ 14 \\ 69 \\ -68 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 22 \\ 26 \end{pmatrix}$$

Bestimme die Lösung der Gleichung:

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 + a_4\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Auch Funktionen sind Vektoren

Die Legendre-Polynome sind wie folgt definiert:

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$
$$\dots$$

explizit: $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^j \frac{(2n-2j)!}{j!(n-j)!(n-2j)!} x^{n-2j}$
mit $n = 0, 1, 2, \dots$

rekursiv: $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$
mit $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = x$

Skalarprodukt für Funktionen

Im Fall der Legendre-Polynome definiert man das Skalarprodukt von jeweils zwei solcher Polynome durch

$$\big\langle P_i(x), P_j(x) \big\rangle = \int_{-1}^{1} P_i(x) \cdot P_j(x)\,\mathrm{d}x$$

Es lässt sich allgemein zeigen, dass $\big\langle P_i(x), P_j(x) \big\rangle = 0$, falls $i \neq j$.

Beispiel

Löse die Gleichung

$$p(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x)$$

für $p(x) = x^2 + 5x - 2$

(a) Skalarprodukt mit $P_0(x) = 1$

$$\int_{-1}^{1} P_0(x)p(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} P_0(x)\big[a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x)\big]\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-1}^{1} P_0(x)p(x)\,\mathrm{d}x = a_0 \int_{-1}^{1} P_0(x)P_0(x)\,\mathrm{d}x + a_1 \underbrace{\int_{-1}^{1} P_0(x)P_1(x)\,\mathrm{d}x}_{0}$$
$$+ a_2 \underbrace{\int_{-1}^{1} P_0(x)P_2(x)\,\mathrm{d}x}_{0}$$

$$\int_{-1}^{1} 1 \cdot (x^2 + 5x - 2)\,\mathrm{d}x = a_0 \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\,\mathrm{d}x$$

$$-\frac{10}{3} = 2a_1$$

$$a_0 = -\frac{5}{3}$$

(b) Skalarprodukt mit $P_1(x) = x$

$$\int_{-1}^{1} P_1(x) \cdot p(x)\,\mathrm{d}x = a_1 \int_{-1}^{1} P_1(x) \cdot P_1(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-1}^{1} x(x^2 + 5x - 2)\,\mathrm{d}x = a_1 \int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{10}{3} = \frac{2}{3}a_1$$

$$a_1 = 5$$

(c) Skalarprodukt mit $P_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$

$$\int_{-1}^{1} P_2(x) \cdot p(x)\,\mathrm{d}x = a_2 \int_{-1}^{1} P_2(x) \cdot P_2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(x^2 - 1)(x^2 + 5x - 2)\,\mathrm{d}x = a_2 \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}(x^2 - 1)^2\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{4}{15} = \frac{2}{5}a_2$$

$$a_2 = \frac{2}{3}$$

Insgesamt:

$$x^2 + 5x - 2 = -\frac{5}{3} + 5x + \frac{2}{3}(x^2 - 1)$$

Die axiomatische Festlegung des Skalarprodukts (kein Prüfungsstoff)

Ein *Skalarprodukt* oder *inneres Produkt* auf einem reellen Vektorraum V ist eine Abbildung $\langle\cdot\,,\cdot\rangle\colon V \times V \to \mathbb{R}$, die für $x, y, z \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften hat:

1. bilinear, d. h. linear in jedem der beiden Argumente:
   - $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
   - $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$
   - $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$
   - $\langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$
2. symmetrisch:
   - $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
3. positiv definit:
   - $\langle x, x\rangle \geq 0$
   - $\langle x, x\rangle = 0$ genau dann, wenn $x = 0$