Orthogonale Vektoren und Funktionen **Übungen**

Aufgabe 1

Es sei $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ eine Orthogonalbasis und $\vec{w}$ ein Vektor in $\mathbb{R}^n$.

Zeige formal, wie man die die Lösung der Gleichung

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n = \vec{w}$$

für ein a_k $(1 \leq k \leq n)$ bestimmt. Begründe die wesentlichen Schritte.

Aufgabe 2

Berechne den Winkel zwischen den Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = x^{-3}$ bezüglich des folgenden Skalarprodukts

$$\langle f, g\rangle = \int_1^2 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 3

(a) $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(n-k)!}{n!} x^k$

Gesucht: $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$

(b) $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x + 1$; $P_{n+1} = xP_n(x) + nP_{n-1}(x)$

Gesucht: $P_2(x)$, $P_3(x)$ (in vereinfachter Form)

Aufgabe 4

Gegeben: $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix}2\\7\\9\end{pmatrix}$ und $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix}7\\4\\8\end{pmatrix}$

(a) Zeige, dass $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ linear unabhängig sind.

(b) Bestimme mit dem Verfahren von Gram-Schmidt aus $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ eine orthogonale Basis $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$.

(c) Gib die zu $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ gehörende orthonormale Basis $\vec{c}_1$, $\vec{c}_2$, $\vec{c}_3$ an.