Das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt

Ziel

Konstruiere aus einer Folge von n *linear unabhängigen* Vektoren

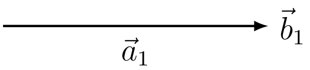
$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$$

eine Folge von n *orthogonalen* (oder orthonormalen) Vektoren

$$\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n.$$

Schritt 1

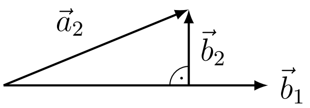
Der erste Vektor $\vec{a}_1$ wird zum ersten Vektor $\vec{b}_1$ der neuen orthogonalen Basis.



$$\boxed{\vec{b}_1 = \vec{a}_1}$$

Schritt 2

Bestimme $\vec{b}_2$ so, dass $\vec{b}_1 \perp \vec{b}_2$ und $\vec{a}_2 = \beta_1 \vec{b}_1 + \vec{b}_2$:

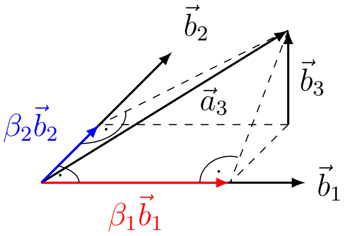


$$\begin{aligned}
\vec{b}_2 &\overset{(*)}{=} \vec{a}_2 - \beta_1 \vec{b}_1 \\
\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 &= 0 \quad (\vec{b}_1 \perp \vec{b}_2) \\
\vec{b}_1 \cdot \left(\vec{a}_2 - \beta_1 \vec{b}_1\right) &= 0 \\
\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2 - \beta_1 \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1} \quad \text{in } (*) \text{ einsetzen}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1} \, \vec{b}_1}$$

Schritt 3

Bestimme $\vec{b}_3$ so, dass $\vec{b}_1 \perp \vec{b}_3$, $\vec{b}_2 \perp \vec{b}_3$ und $\vec{a}_3 = \beta_1\vec{b}_1 + \beta_2\vec{b}_2 + \vec{b}_3$:



$$\vec{b}_3 \overset{(*)}{=} \vec{a}_3 - \beta_1\vec{b}_1 - \beta_2\vec{b}_2$$

$$\begin{aligned}
\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_3 &= 0 & \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 &= 0 \\
\vec{b}_1 \cdot \left(\vec{a}_3 - \beta_1\vec{b}_1 - \beta_2\vec{b}_2\right) &= 0 & \vec{b}_2 \cdot \left(\vec{a}_3 - \beta_2\vec{b}_1 - \beta_2\vec{b}_2\right) &= 0 \\
\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_3 - \beta_1\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 &= 0 & \vec{b}_2 \cdot \vec{a}_3 - \beta_2\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2\big) &= 0 \\
\beta_1 &= \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1} & \beta_2 &= \frac{\vec{b}_2 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1}\,\vec{b}_1 - \frac{\vec{b}_2 \cdot \vec{a}_3}{\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2}\,\vec{b}_2}$$

Schritt n

Bestimme $\vec{b}_n$ so, dass

- $\vec{b}_1 \perp \vec{b}_n$, $\vec{b}_2 \perp \vec{b}_n$, $\ldots$, $\vec{b}_{n-1} \perp \vec{b}_{n-1}$
- $\vec{a}_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i\vec{b}_i + \vec{b}_n$

Induktiv erhalten wir die Orthogonalisierung nach Gram-Schmidt:

$$\boxed{\vec{b}_n = \vec{a}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\vec{b}_i \cdot \vec{a}_n}{\vec{b}_i \cdot \vec{b}_i}\,\vec{b}_i}$$

Jørgen Pedersen Gram (1850–1916) und Erhard Schmidt (1876–1959)

- Das Verfahren kann in allen Vektorräumen angewendet werden, in denen ein Skalarprodukt $\langle \cdot\,,\cdot \rangle$ definiert ist.
- Bei dem Verfahren kumulieren sich Rundungsfehler ungünstig. Deshalb eignet es sich nicht für die Berechnung auf einem Computer mit Gleitkommaarithmetik, wenn viele Vektoren oder Vektoren mit vielen Komponenten orthogonalisiert werden sollen.