Aufgabe 6.1

$$\begin{aligned}
y' &= y \sin x \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= y \sin x \\
\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \sin x\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int \sin x\,\mathrm{d}x \\
\ln|y| &= -\cos x + C_1 \\
|y| &= \mathrm{e}^{C_1 - \cos x} \\
y &= \pm\mathrm{e}^{C_1} \cdot \mathrm{e}^{-\cos x} \\
y &= C\mathrm{e}^{-\cos x} \qquad (C = \pm\mathrm{e}^{C_1})
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.2

$$\begin{aligned}
y' &= 2x(1+y^2) \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2x(1+y^2) \\
\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y &= 2x\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y &= \int 2x\,\mathrm{d}x \\
\arctan y &= x^2 + C \\
y &= \tan(x^2 + C)
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.3

$$\begin{aligned}
y' &= -2x + 1 \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -2x + 1 \\
\mathrm{d}y &= (-2x+1)\,\mathrm{d}x \\
\int 1\,\mathrm{d}y &= \int (-2x+1)\,\mathrm{d}x \\
y &= -x^2 + x + C \quad \text{(allgemeine Lösung)}
\end{aligned}$$

AWP: $P_0(0,0)$: $0 = 0 + 0 + C \quad \Rightarrow \quad C = 0$

$y(x) = -x^2 + x$

Aufgabe 6.4

$$y' = \frac{y}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C_1$$

$$|y| = \mathrm{e}^{\ln|x|+C_1} = \mathrm{e}^{\ln|x|} \cdot \mathrm{e}^{C_1}$$

$$y = \pm C_2 \cdot |x| \quad (C_2 = \mathrm{e}^{C_1})$$

$$y = C \cdot |x| \quad (C = \pm C_2)$$

AWP: $x_0 = 1$, $y_0 = 2$:

$2 = C \cdot 1 \Rightarrow C = 2$

$y = 2x$

Aufgabe 6.5

$$y' = \frac{y^2}{x^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2}{x^2}$$

$$\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} - C$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + C$$

$$y = \frac{1}{1/x + C} = \frac{x}{1 + Cx}$$

AWP: $x_0 = 1$, $y_0 = -1$:

$-1 = \dfrac{1}{1 + C} \Rightarrow C = -2$

$y = \dfrac{x}{1 - 2x}$

Aufgabe 6.6

$$\begin{aligned}
y' &= y^2 x + y^2 \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= y^2(x+1) \\
\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y &= (x+1)\,\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y &= \int (x+1)\,\mathrm{d}x \\
-\frac{1}{y} &= \frac{1}{2}x^2 + x + C \\
\frac{1}{y} &= -\frac{1}{2}x^2 - x - C \\
y &= \frac{-1}{\frac{1}{2}x^2 + x + C}
\end{aligned}$$

AWP: $x_0 = 0$, $y_0 = 1$:

$1 = \dfrac{-1}{C} \Rightarrow C = -1$

$y = \dfrac{-1}{\frac{1}{2}x^2 + x - 1} = \dfrac{2}{2 - 2x - x^2}$

Aufgabe 6.7

$$\begin{aligned}
y' &= \mathrm{e}^{x-y} \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y} \\
\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y &= \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\
\int \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y &= \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\
\mathrm{e}^y &= \mathrm{e}^x + C \\
y &= \ln(\mathrm{e}^x + C)
\end{aligned}$$

AWP: $x_0 = 1$, $y_0 = 2$:

$2 = \ln(\mathrm{e} + C) \Rightarrow \mathrm{e}^2 = \mathrm{e} + C \Rightarrow C = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}$

$y = \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^2 - \mathrm{e})$

Aufgabe 6.8

$$
\begin{aligned}
y' &= k \cdot y \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= k \cdot y \\
\mathrm{d}y &= k \cdot y \,\mathrm{d}x \\
\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= k \,\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int k \,\mathrm{d}x \\
\ln|y| &= kx + C_1 \\
|y| &= \mathrm{e}^{kx + C_1} \\
y &= \pm \mathrm{e}^{kx} \cdot \mathrm{e}^{C_1} \\
y &= C \cdot \mathrm{e}^{kx} \quad (C = \pm \mathrm{e}^{C_1})
\end{aligned}
$$

AWP ($y = a,\ x = 0$): $a = C \cdot \mathrm{e}^{k \cdot 0} = C \Rightarrow C = a$

$y = a \cdot \mathrm{e}^{kx}$

- Die Konstante k beeinflusst den Anstieg der Kurve (Wachstumskonstante).
- Die Konstante a ist der Ordinatenabschnitt von $y(x)$ (Anfangswert bei $t = 0$).

Aufgabe 6.9

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= kx(1-x) \\
\mathrm{d}x &= kx(1-x)\,\mathrm{d}t \\
\frac{1}{x(1-x)}\,\mathrm{d}x &= k\,\mathrm{d}t \\
\int \frac{1}{x(1-x)}\,\mathrm{d}x &= \int k\,\mathrm{d}t \\
\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x &= kt + C_1 \quad \text{(Partialbruchzerlegung)} \\
\ln|x| - \ln|1-x| &= kt + C_1 \quad \text{(Substitutionsregel)} \\
\ln\left|\frac{x}{1-x}\right| &= kt + C_1 \quad \text{(Logarithmengesetze)}
\end{aligned}$$

$$\left|\frac{x}{1-x}\right| = \mathrm{e}^{kt+C_1} = \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{kt}$$

$$\frac{x}{1-x} = C_2\mathrm{e}^{kt} \qquad (C_2 = \pm\mathrm{e}^{C_1})$$

$$x = C_2(1-x)\mathrm{e}^{kt} = C_2\mathrm{e}^{kt} - C_2x\mathrm{e}^{kt}$$

$$x(1 + C_2\mathrm{e}^{kt}) = C_2\mathrm{e}^{kt}$$

$$x = \frac{C_2\mathrm{e}^{kt}}{1 + C_2\mathrm{e}^{kt}} = \frac{C_2\mathrm{e}^{kt}\cdot\mathrm{e}^{-kt}}{(1 + C_2\mathrm{e}^{kt})\cdot\mathrm{e}^{-kt}}$$

$$x = \frac{C_2}{\mathrm{e}^{-kt} + C_2} = \frac{C_2\cdot C_2^{-1}}{(\mathrm{e}^{-kt} + C_2)\cdot C_2^{-1}}$$

$$x = \frac{1}{1 + C\mathrm{e}^{-kt}} \qquad (C = C_2^{-1})$$

AWP: $t = 0$ und $x = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1+C} \quad \Rightarrow \quad C = 1$$

$$y = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-kt}}$$

Aufgabe 6.10

$$
\begin{aligned}
yy' + k^2x &= 0\\
y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -k^2x\\
y\,\mathrm{d}y &= -k^2x\,\mathrm{d}x\\
\int y\,\mathrm{d}y &= -\int k^2x\,\mathrm{d}x\\
\frac{1}{2}y^2 &= -\frac{1}{2}k^2x^2 - C_1 \quad || \cdot 2\\
y^2 &= -k^2x^2 - 2C_1\\
y^2 + k^2x^2 &= -2C_1
\end{aligned}
$$

$y^2 + (kx)^2 = C \qquad$ (wobei $C = -2C_1$)

AWP: $x_0 = a$, $y_0 = 0$:

$0 + (ka)^2 = C \quad \Rightarrow \quad C = (ka)^2$

$y^2 + (kx)^2 = (ka)^2$

Dividiert man die partikuläre Lösung durch $(ka)^2$ und vertauscht die Summanden, erhält man die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{ka}\right)^2 = 1$$

die grafisch als Ellipse mit Mittelpunkt $M(0,0)$ und den Halbachsen a und ka gedeutet werden kann.

Aufgabe 6.11

Die korrekte (ausführliche) Lösung der beiden Fälle ist derzeit noch als „Challenge“ ausgeschrieben. Für die Prüfung ist eine Aufgabe in diesem Umfang nicht relevant.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(a-x)(b-x)$$

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)}\,\mathrm{d}x = k\,\mathrm{d}t$$

Fall 1 ($a \neq b$): Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{b-x}$$

$$\begin{aligned} 1 &= A(b-x) + B(a-x) \\ 1 &= (-A-B)x + (bA + aB) \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} -A-B=0 \\ bA+aB=1 \end{matrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix} -A=B \\ bA-aA=1 \end{matrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix} A=1/(b-a) \\ B=-1/(b-a) \end{matrix}$$

$$\frac{1}{b-a}\int\frac{1}{a-x}\mathrm{d}x - \frac{1}{b-a}\int\frac{1}{b-x}\mathrm{d}x = \int k\,dt \quad ||\cdot(b-a)$$

$$\begin{aligned} \int\frac{1}{a-x}\mathrm{d}x - \int\frac{1}{b-x}\mathrm{d}x &= \int k(b-a)\,dt \\ -\ln(a-x) + \ln(b-x) &= k(b-a)t + C_1 \\ \ln(a-x) - \ln(b-x) &= -k(b-a)t - C_1 \\ \ln\frac{a-x}{b-x} &= -k(b-a)t - C_1 \\ \frac{x-a}{x-b} &= \mathrm{e}^{-k(b-a)t}\mathrm{e}^{-C_1} \\ x-a &= C_2(x-b)\mathrm{e}^{-k(b-a)t} \\ x - C_2x\mathrm{e}^{-k(b-a)t} &= a - C_2b\mathrm{e}^{-k(b-a)t} \\ x\big(1-C_2\mathrm{e}^{-k(b-a)t}\big) &= a - C_2b\mathrm{e}^{-k(b-a)t} \\ x &= \frac{a-Cb\mathrm{e}^{-k(b-a)t}}{1-C\mathrm{e}^{-k(b-a)t}} \end{aligned}$$

AWP: $x(0) = 0$ (zu Beginn hat noch keine Stoffmenge reagiert)

$$0 = \frac{a-Cb}{1-C} \quad\Rightarrow\quad 0 = a - Cb \quad\Rightarrow\quad C = a/b$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a - ab^{-1}\cdot b\mathrm{e}^{-k(b-a)t}}{1-ab^{-1}\cdot\mathrm{e}^{-k(b-a)t}}\cdot\frac{b}{b} \\ &= \frac{ab - ab\mathrm{e}^{-k(b-a)t}}{b - a\mathrm{e}^{-k(b-a)t}} = ab\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-k(b-a)t}}{b-a\mathrm{e}^{-k(b-a)t}} \end{aligned}$$

Fall 2 ($a = b$):

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= k(a-x)^2 \\
\frac{1}{(a-x)^2}\,\mathrm{d}x &= k\,\mathrm{d}t \\
\int \frac{1}{(a-x)^2}\mathrm{d}x &= \int k\,\mathrm{d}t \\
-\frac{1}{a-x} &= kt + C \\
\frac{1}{x-a} &= kt + C \\
x - a &= \frac{1}{kt+C} \\
x &= a + \frac{1}{kt+C}
\end{aligned}$$

AWP: $x(0) = 0$ (zu Beginn hat noch keine Stoffmenge reagiert)

$$0 = a + \frac{1}{C} \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{C} \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{a}$$

$$x(t) = a + \frac{1}{kt - 1/a} = a + \frac{a}{akt-1} = \frac{a(akt-1)+a}{akt-1} = \frac{a^2kt}{akt-1}$$

Aufgabe 6.12

$$\dot{x} = -k\sqrt{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -k\sqrt{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = -k\,\mathrm{d}t$$

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = -k\int 1\,\mathrm{d}t$$

$$2x^{\frac{1}{2}} = -kt + C_1$$

$$x^{\frac{1}{2}} = -\frac{k}{2}t + \frac{1}{2}C_1$$

$$x = \left(C - \frac{1}{2}kt\right)^2 \qquad (C = \frac{1}{2}C_1)$$

AWP: $x(0) = h$

$h = (C-0)^2 = C^2 \quad \Rightarrow \quad C = \sqrt{h}$

Lösung: $x(t) = \left(\sqrt{h} - \frac{r^2}{R^2}\sqrt{\frac{g}{2}}\cdot t\right)^2$

Dabei wurde $k = \frac{r^2}{R^2}\sqrt{2g}$ eingesetzt und der Faktor $\frac{1}{2}$ unter die Wurzel gezogen.

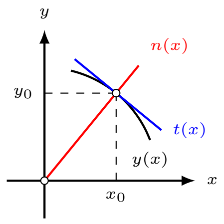
Ausfliesszeit: Wasserstand $h = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t_a) = 0$

$$\left(\sqrt{h} - \frac{r^2}{R^2}\sqrt{\frac{g}{2}}\cdot t\right)^2 = 0$$

$$\frac{r^2}{R^2}\sqrt{\frac{g}{2}}\cdot t = \sqrt{h}$$

$$t = \frac{R^2}{r^2}\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Aufgabe 6.13



Gleichung der Tangente $t(x)$: $y'(x_0) = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$

Gleichung der Normalen $n(x)$: $\dfrac{-1}{y'(x_0)} = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$

Für jeden Kurvenpunkt (x_0, y_0) muss gelten: $(0,0) \in G_n$

Bemerkungen:

- Statt y_0 hätte man deutlicher $y(x_0)$ schreiben können.
- Nicht x_0 und y_0 müssen null gesetzt werden sondern x und y.

$$\frac{-1}{y'(x_0)} = \frac{0 - y_0}{0 - x_0}$$

$$-y'(x_0) = \frac{x_0}{y_0}$$

$$y_0 y'(x_0) = -x_0$$

Da die Bedingung für jedes $x_0 \in D$ gelten muss, können wir die DGL ohne den Index schreiben:

$$y \cdot y' = -x$$

Separation:

$$\begin{aligned} y\,y' &= -x \\ y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -x \\ y\,\mathrm{d}y &= -x\,\mathrm{d}x \\ \int y\,\mathrm{d}y &= -\int x\,\mathrm{d}x \\ \frac{1}{2}y^2 &= -\frac{1}{2}x^2 + C_1 \\ y^2 &= -x^2 + 2C_1 \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 = C \qquad (C = 2C_1)$$

geometrische Deutung: Kreis mit $M(0,0)$ und $r = \sqrt{C}$