Aufgabe 5.1

DGL: $y'' - 6y' + 9y = 0$

charakteristische Gleichung:
$$\begin{aligned} \lambda^2 - 6\lambda + 9 &= 0 \\ (\lambda - 3)^2 &= 0 \\ \lambda_1 = \lambda_2 &= 3 \end{aligned}$$

$y(x) = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{3x}$

$y'(x) = C_2\mathrm{e}^{3x} + 3(C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{3x}$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= C_1 = 2 \\ y'(0) &= C_2 + 3C_1 = -1 \end{aligned}\right\} C_1 = 2,\ C_2 = -7$$

$y(x) = (2 - 7x)\mathrm{e}^{3x}$

Aufgabe 5.2

DGL: $y'' - \frac{1}{6}y' - \frac{1}{6}y = 0$

charakteristische Gleichung:
$$\begin{aligned} \lambda^2 - \tfrac{1}{6}\lambda - \tfrac{1}{6} &= 0 \\ 6\lambda^2 - \lambda - 1 &= 0 \\ (2\lambda - 1)(3\lambda + 1) &= 0 \\ \lambda_1 &= \tfrac{1}{2} \\ \lambda_2 &= -\tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

$y(x) = C_1\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + C_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$

$y'(x) = \frac{1}{2}C_1\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{3}C_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 = 0 \\ y'(0) &= \tfrac{1}{2}C_1 - \tfrac{1}{3}C_2 = 5 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 6,\ C_2 = -6$$

$y(x) = 6\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 6\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$

Aufgabe 5.3

DGL: $y'' + 2y' + 10y = 0$

charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$

$$\begin{aligned} D &= 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -36 = (6\mathrm{i})^2 \\ \lambda_1 &= \frac{-2 + 6\mathrm{i}}{2} = -1 + 3\mathrm{i} \\ \lambda_2 &= \cdots = -1 - 3\mathrm{i} \end{aligned}$$

$y(x) = \mathrm{e}^{-x}\big(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x\big)$

$y'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\big(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x\big) + \mathrm{e}^{-x}\big(3C_1 \cos 3x - 3C_2 \sin 3x\big)$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= C_2 = 6 \\ y'(0) &= -C_2 + 3C_1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2,\ C_2 = 6$$

$y(x) = \mathrm{e}^{-x}\big(2 \sin 3x + 6 \cos 3x)$

Aufgabe 5.4

DGL: $y'' + 2y' = 0$

charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 2\lambda = 0$

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda + 2) &= 0 \\ \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= -2 \end{aligned}$$

$y(x) = C_1\mathrm{e}^0 + C_2\mathrm{e}^{-2x} = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-2x}$

$y'(x) = -2C_2\mathrm{e}^{-2x}$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 = 3 \\ y'(0) &= -2C_2 = 2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 4,\ C_2 = -1$$

$y(x) = 4 - \mathrm{e}^{-2x}$

Aufgabe 5.5

DGL: $y'' + 16y = 0$

charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 16 = 0$

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= -16 = (3\mathrm{i})^2 \\ \lambda_1 &= 0 + 4\mathrm{i} \\ \lambda_2 &= 0 - 4\mathrm{i} \end{aligned}$$

$y(x) = \mathrm{e}^0\big(C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x\big) = C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x$

$y'(x) = 4C_1 \cos 4x - 4C_2 \sin 4x$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= C_2 = 2 \\ y'(0) &= 4C_1 = -4 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1,\ C_2 = 2$$

$$y(x) = 2\cos 4x - \sin 4x$$

Aufgabe 5.6

Divisor zum Normalisieren der beiden Amplituden: $A = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$$\sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\sin\omega t + \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$$

(a) $\sin\gamma = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$; $\cos\gamma = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$; $\tan\gamma = 3/2 \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx 0.983$

$\sqrt{13}\sin(\omega t + 0.983)$

(b) $\sin\gamma = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$; $\cos\gamma = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$; $\tan\gamma = 2/3 \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx 0.588$

$\sqrt{13}\cos(\omega t - 0.588)$

Aufgabe 5.7

$$y_1 = C_1 \mathrm{e}^{-\frac{b}{2a}x}$$

$$y_1' = -\frac{b}{2a} C_1 \mathrm{e}^{-\frac{b}{2a}x}$$

$$y_1'' = \frac{b^2}{4a^2} C_1 \mathrm{e}^{-\frac{b}{2a}x}$$

einsetzen:

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= \left(a\cdot\frac{b^2}{4a^2} - b\cdot\frac{b}{2a} + c\right) C_1 \mathrm{e}^{-\frac{b}{2a}x} \\ &= \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right) C_1 \mathrm{e}^{-\frac{b}{2a}x} \\ &= \left(\frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}\right) C_1 \mathrm{e}^{-\frac{b}{2a}x} \\ &= -\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) C_1 \mathrm{e}^{-\frac{b}{2a}x} = 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.7

$$y_2 = C_2 x \mathrm{e}^{-\frac{b}{2a}x}$$

$$y_2' = C_2 \mathrm{e}^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{2a} x C_2 \mathrm{e}^{-\frac{b}{2a}x}$$

$$y_2'' = \cdots = -\frac{b}{a} C_2 \mathrm{e}^{-\frac{b}{2a}x} + \frac{b^2}{4a^2} x C_2 \mathrm{e}^{-\frac{b}{2a}x}$$

einsetzen:

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= \left(-b + \frac{b^2}{4a}x + b - \frac{b^2}{2a}x + cx\right) C_2 \mathrm{e}^{-\frac{b}{2a}x} \\ &= \frac{b^2x - 2b^2x + 4acx}{4a} C_2 \mathrm{e}^{-\frac{b}{2a}x} \\ &= \frac{-(b^2 - 4ac)x}{4a} C_2 \mathrm{e}^{-\frac{b}{2a}x} = 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.8

Setze in der Lösungsfunktion der erzwungenen gedämpften Schwingung (Formelsammlung S. 82) $\delta = 0$ ein:

$$y(t) = y_h(t) + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cos(\omega_1 t)$$

$y_h(t)$ ist eine allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL.

Mit $\delta = 0$ folgt aus $\tan\gamma = \dfrac{2\delta\omega_1}{\omega_1^2 - \omega_0^2} = 0$ auch $\gamma = 0$

Aufgabe 5.9

$$y(t) = \frac{A}{2\omega_0} t \cdot \sin\omega_0 t$$

$$\dot{y}(t) = \frac{A}{2\omega_0} \cdot \sin\omega_0 t + \frac{A}{2} t \cdot \cos\omega_0 t$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{A}{2} \cdot \cos\omega_0 t + \frac{A}{2} \cdot \cos\omega_0 t - \frac{A\omega_0}{2} t \cdot \sin\omega_0 t$$

$\ddot{y}(t)$ und $y(t)$ in die DGL $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$ einsetzen:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \omega_0^2 y &= A\cos\omega_0 t - \frac{A\omega_0}{2} t \cdot \sin\omega_0 t + \omega^2 \cdot \frac{A}{2\omega_0} \cdot \sin\omega_0 t \\ &= A\cos\omega_0 t \end{aligned}$$

Aufgabe 5.10

- Lösung der homogenen DGL $y'' - 4y + 3y = 0$

  $$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$
  $$(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$$

  $$y_h(x) = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{3x}$$

- partikuläre Lösung der inhomogenen DGL:

Ansatz: $$\begin{aligned} y_i(x) &= Ax^2 + Bx + C \\ y_i'(x) &= 2Ax + B \\ y_i''(x) &= 2A \end{aligned}$$

einsetzen:

$$\begin{aligned} 2A - 4(2Ax + B) + 3(Ax^2 + Bx + C) &= 6x^2 + 5x + 3 \\ 3Ax^2 + (-8A + 3B)x + (2A - 4B + 3C) &= 6x^2 + 5x + 3 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} 3A &= 6 & & A = 2 \\ -8A + 3B &= 5 & \Rightarrow \quad & B = 7 \\ 2A - 4B + 3C &= 3 & & C = 9 \end{aligned}$$

$y_i(x) = 2x^2 + 7x + 9$

- allgemeine Lösung:

  $y(x) = y_h(x) + y_i(x) = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{3x} + 2x^2 + 7x + 9$

Aufgabe 5.11

(a) $\ddot{y} + 4y = 0$: freie ungedämpfte Schwingung

(b) $\ddot{y} + 7\dot{y} + 12y = 0$: freie gedämpfte Schwingung

(c) $\ddot{y} + 4\dot{y} + 13y = 5\cos(5t)$: erzwungene gedämpfte Schwingung

Aufgabe 5.12

$\Delta F = 0.5\,\mathrm{N}$

$\Delta y = 0.1\,\mathrm{m}$

$m = 0.25\,\mathrm{kg}$

$y(0) = 0.05\,\mathrm{m}$

$\dot{y}(0) = 0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

(a) $\Delta F = D \cdot \Delta y$

$$D = \frac{\Delta F}{\Delta y} = \frac{0.5\,\mathrm{N}}{0.1\,\mathrm{m}} = 5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

(b) DGL: $m\ddot{y} + Dy = 0$

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = 0 \quad \text{(freie ungedämpfte Schwingung)}$$

Kreisfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{5\,\mathrm{Nm^{-1}}}{0.25\,\mathrm{kg}}} \approx 4.472\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$

Frequenz: $\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 0.712\,\mathrm{s^{-1}}$

Schwingungsdauer: $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \nu^{-1} \approx 1.405\,\mathrm{s}$

(c) Anfangswertproblem: $y(0) = 0.05\,\mathrm{m}$, $\dot{y}(0) = 0$

$$y(t) = C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t$$
$$\dot{y}(t) = -C_1\omega_0 \sin\omega_0 t + C_2\omega_0 \cos\omega_0 t$$

$$y(0) = C_1 = 0.05\,\mathrm{m}$$
$$\dot{y}(0) = C_2 = 0\,\mathrm{m}$$

$$y(t) = 0.05\,\cos(4.472t)\,\mathrm{m}$$

Aufgabe 5.13

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{D}{m} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$D = \frac{4\pi^2 \cdot m}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 2}{9}\,\mathrm{kg \cdot s^{-2}} = 8.773\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$$

Aufgabe 5.14

(a) Amplitude: $A = 0.04\,\mathrm{m}$

Federkonstante: $D = \dfrac{\Delta F}{\Delta x} = \dfrac{6 \cdot 10^4\,\mathrm{N}}{0.03\,\mathrm{m}} = 0.02\,\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{0.02}{0.002}}\,\mathrm{s}^{-1} = \sqrt{10}\,\mathrm{s}^{-1} \approx 3.162\,\mathrm{s}^{-1}$$

Frequenz: $\nu = \dfrac{\omega_0}{2\pi} \approx 0.5033\,\mathrm{s}^{-1}$

(b) $y(t) = -0.04\cos\left(\sqrt{10}t\right)\,\mathrm{m}$

für Teil (c): $\dot{y}(t) = 0.04\sqrt{10}\cos\left(\sqrt{10}t\right)\,\mathrm{m\,s}^{-1}$
$= \sqrt{2}\cos\left(\sqrt{10}t\right)\,\mathrm{m\,s}^{-1}$

(c)
$$-0.02 = -0.04\cos\left(\sqrt{10}t\right)$$
$$\cos\left(\sqrt{10}t\right) = 0.5$$

1. Lösung:

$$\sqrt{10}t = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi = \frac{\pi + k \cdot 6\pi}{3}$$
$$t_{1,k} = \frac{\pi + k \cdot 6\pi}{3\sqrt{10}}\,\mathrm{s}$$

2. Lösung:

$$\sqrt{10}t = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi = \frac{5\pi + k \cdot 6\pi}{3}$$
$$t_{2,k} = \frac{5\pi + k \cdot 6\pi}{3\sqrt{10}}\,\mathrm{s}$$

Aufgabe 5.15

$m\ddot{y} + Dy = 0$ freie ungedämpfte Schwingung

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$
$$\ddot{y} + \omega_0^2 = 0$$

$$D = \frac{F}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{0.1\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\mathrm{m\,s}^{-2}}{0.05\,\mathrm{m}} = 19.62\,\mathrm{Nm}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{19.62\,\mathrm{N\,m}^{-1}}{0.1\,\mathrm{kg}}} = 14\,\mathrm{rad\,s}^{-1}$$

AWP: $y(t) = C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t)$
$\dot{y}(t) = -\omega_0 C_1\sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2\cos(\omega_0 t)$

$y(0) = C_1 = 0\,\text{m}$

$\dot{y}(0) = \omega_0 C_2 = 0.1\,\text{ms}^{-1} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \dfrac{0.1\,\text{m}\,\text{s}^{-1}}{14\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}} = 0.00714\,\text{m}$

(a) $y(t) = 0.00714\,\text{m} \cdot \sin(14\,\text{rad}\,\text{s}^{-1} \cdot t)$

(b)
$$\begin{aligned} \hat{y}\sin(\omega_0 t) &= 0 \\ \sin(\omega_0 t) &= 0 \\ \omega_0 t &= \pi \\ t &= \frac{\pi}{\omega_0} \\ t &= \frac{\pi\,\text{rad}}{14\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}} = 0.224\,\text{s} \end{aligned}$$

Aufgabe 5.16

$m\ddot{y} + Dy = 0 \quad$ freie ungedämpfte Schwingung

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \frac{D}{m} y &= 0 \\ \ddot{y} + \omega_0^2 &= 0 \end{aligned}$$

$D = \dfrac{F}{\Delta y} = \dfrac{m \cdot g}{\Delta y} \quad \Rightarrow \quad D = \dfrac{2\,\text{kg} \cdot 9.81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}}{0.049\,\text{m}} = 400.41\,\text{Nm}^{-1}$

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{D}{m}} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\dfrac{400.41\,\text{N}\,\text{m}^{-1}}{2\,\text{kg}}} = 14.15\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$

AWP: $y(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$
$\dot{y}(t) = -\omega_0 C_1 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2 \cos(\omega_0 t)$

$y(0) = C_1 = -0.033\,\text{m}$

$\dot{y}(0) = \omega_0 C_2 = 0.1\,\text{ms}^{-1} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \dfrac{1\,\text{m}\,\text{s}^{-1}}{14.15\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}} = 0.0707\,\text{m}$

(a)
$$\begin{aligned} y(t) = {} & -0.033\,\text{m} \cdot \cos(14.15\,\text{rad}\,\text{s}^{-1} \cdot t) \\ & + 0.0707\,\text{m} \cdot \sin(14.15\,\text{rad}\,\text{s}^{-1} \cdot t) \end{aligned}$$

(b) $T = \dfrac{\omega_0}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad T = \dfrac{2\pi\,\text{rad}}{14.15\,\text{rad}\ \text{s}^{-1}} = 0.444\,\text{s}$

$\hat{y} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad \Rightarrow \quad \hat{y} = 0.0780\,\text{m}$

$\varphi = \arctan \dfrac{C_2}{C_1} + \pi \quad \Rightarrow \quad \varphi = 2.01\,\text{rad}$

Aufgabe 5.17

$m\ddot{y} + k\dot{y} + Dy = 0$ freie gedämpfte Schwingung

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 = 0$$

$$D = \frac{F}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{0.02\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}}{0.05\,\mathrm{m}} = 3.92\,\mathrm{Nm^{-1}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{3.92\,\mathrm{N\,m^{-1}}}{0.02\,\mathrm{kg}}} = 14\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$

$$\delta = \frac{k}{2m} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{0.4\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}}}{2 \cdot 0.02\,\mathrm{kg}} = 10\,\mathrm{s^{-1}}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad \Rightarrow \quad \omega = 9.80\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$

AWP:

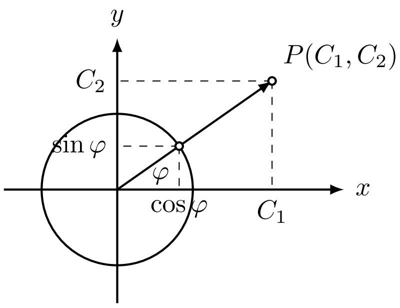
$$y(t) = \mathrm{e}^{-\delta t}\big[C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)\big]$$

$$\dot{y}(t) = -\delta\mathrm{e}^{-\delta t}\big[C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)\big] + \omega\mathrm{e}^{-\delta t}\big[-C_1\sin(\omega t) + C_2\cos(\omega t)\big]$$

$$y(0) = C_1 = 0.02\,\mathrm{m}$$

$$\dot{y}(0) = -\delta C_1 + \omega C_2 = 0\,\mathrm{ms^{-1}} \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.0204\,\mathrm{m}$$

$$y(t) = \mathrm{e}^{-10\,\mathrm{s^{-1}}\cdot t}\big[0.02\,\mathrm{m} \cdot \cos(9.8\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \cdot t) + 0.0204\,\mathrm{m} \cdot \sin(9.8\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \cdot t)\big]$$



Amplitude: $\hat{y} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = 0.0286\,\mathrm{m}$

Phasenwinkel: $\varphi = \arg(P) = 0.795$ (noch nicht einsetzen!)

$$y(t) = 0.0286\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{e}^{-10\,\mathrm{s^{-1}}\cdot t}\big[\cos 0.795 \cdot \cos(9.8\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \cdot t) + \sin 0.795 \cdot \sin(9.8\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \cdot t)\big]$$

$$= 0.0286\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{e}^{-10\,\mathrm{s^{-1}}\cdot t}\cos\big(9.8\,\mathrm{rad\,s^{-1}} - 0.795\big)$$

(Phasenwinkel-Darstellung; Davon wird hier aber nur $\hat{y}$ benötigt.)

(b) $$\begin{aligned} 0.0286\,\mathrm{m}\cdot \mathrm{e}^{-10t} &= 0.0001\,\mathrm{m} \\ \mathrm{e}^{-10t} &= 0.350 \\ -10t &= \ln(0.350) \\ t &= 0.566\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Aufgabe 5.18

freie gedämpfte Schwingung: $m\ddot{y} + F_R + F_F = 0$

Für laminare Strömung um eine Kugel mit Radius r gilt (Stokes):

$$F_R = 6\pi\eta r v = 6\pi\eta r\dot{y}$$

zusammen mit $F_F = Dy$ einsetzen:

$$m\ddot{y} + 6\pi\eta r\dot{y} + Dy = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{6\pi\eta r}{m}\dot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

Masse einer Kugel mit Dichte ϱ: $m = \varrho \cdot V = \varrho \cdot \dfrac{4\pi}{3}r^3$

$$\ddot{y} + \frac{3\cdot 6\pi\eta r}{4\pi r^3\varrho}\dot{y} + \frac{3D}{4\pi r^3\varrho}y = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{9\eta}{2r^2\varrho}\dot{y} + \frac{3D}{4\pi r^3\varrho}y = 0 \quad \text{(ok)}$$

$2\delta = \dfrac{9\eta}{2r^2\varrho} \quad \Rightarrow \quad \delta = \dfrac{9\eta}{4r^2\varrho} = 4.16\,\mathrm{s}^{-1}$

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{3D}{4\pi r^3\varrho}} = 7.00\,\mathrm{s}^{-1}$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 5.54\,\mathrm{s}^{-1}$

$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 1.13\,\mathrm{s}$

AWP:

$y(t) = \mathrm{e}^{-\delta t}\big[C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)\big]$

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = &-\delta \mathrm{e}^{-\delta t}\big[C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)\big] \\ &+ \omega \mathrm{e}^{-\delta t}\big[-C_1\sin(\omega t) + C_2\cos(\omega t)\big] \end{aligned}$$

$y(0) = C_1 = 0.04\,\mathrm{m}$

$\dot{y}(0) = -\delta C_1 + \omega C_2 = 0\,\mathrm{ms}^{-1} \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.0307\,\mathrm{m}$

$$\begin{aligned} y(t) = \mathrm{e}^{-4.16\,\mathrm{s}^{-1}\cdot t}\big[&0.04\,\mathrm{m}\cdot\cos(5.54\,\mathrm{rad\,s}^{-1}\cdot t) \\ &+ 0.0307\,\mathrm{m}\cdot\sin(5.54\,\mathrm{rad\,s}^{-1}\cdot t)\big] \end{aligned}$$

Aufgabe 5.19

Da ein Auto normalerweise 4 Räder hat, muss jeder Stossdämpfer nur $m = 200\,\mathrm{kg}$ dämpfen.

Dämpfungskonstante: $k = 1500\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$

$$\delta = \frac{k}{2m} = 3.75\,\mathrm{s^{-1}}$$

Federkonstante: $D = 16\,000\,\mathrm{N\,m^{-1}}$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = 8.94\,\mathrm{s^{-1}}$$

Kreisfrequenz: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 8.12\,\mathrm{s^{-1}}$

Periode: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 0.774\,\mathrm{s}$

Abklingfaktor: $\mathrm{e}^{-3.75\,\mathrm{s^1}\cdot t} = 0.0235^t$

Aufgabe 5.20

Wir erhalten kritische Dämpfung, wenn die charakteristische Gleichung genau eine Lösung besitzt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $D = b^2 - 4ac = 0$ gilt.

Für die DGL in der physikfreundlichen Form

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

lautet die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 y = 0$$

und die obige Bedingung somit

$$D = b^2 - 4ac = 4\delta^2 - 4\omega_0^2 = 4(\delta^2 - \omega_0^2) = 0$$

Also muss bei kritischer Dämpfung $\delta = \omega_0$ gelten.

Das kann man natürlich auch direkt aus der Formelsammlung herauslesen.

$$\delta = \omega_0$$

$$\frac{k}{2m} = \omega_0$$

$$k = 2m \cdot \omega_0$$

$$m = \frac{F_G}{g} = \frac{39.2\,\mathrm{N}}{9.81\,\mathrm{ms^{-2}}} = 4\,\mathrm{kg}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{F_G}{\Delta y \cdot m}} = \sqrt{\frac{m \cdot g}{\Delta y \cdot m}}$$

$$= \sqrt{\frac{g}{\Delta y}} = \sqrt{\frac{9.81\,\mathrm{ms^{-2}}}{0.04\,\mathrm{m}}} = 15.6\,\mathrm{s^{-1}}$$

$k = 2m\omega_0 = 2 \cdot 4 \cdot 15.6\,\mathrm{kg\,s^{-1}} = 125.16\,\mathrm{kg\,s^{-1}} = 125.16\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$

Aufgabe 5.21

Formelsammlung S. 99 (Summen und Produkte)

(a) $\cos 9t - \cos 7t = -2\sin(8t) \cdot \sin(t)$

(b) $\sin 7t - \sin 3t = 2\cos(5t) \cdot \sin(2t)$

(c) $\cos \pi t + \cos 2\pi t = 2\cos \frac{3\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2}$

(d) $\sin 3.6t + \sin 3.2t = 2\sin(3.4t) \cdot \cos(0.2t)$

Aufgabe 5.22

(a) $m\ddot{y} + Dy = F_0 \cos \omega_1 t$

$$\ddot{y} + \frac{D}{m}y = \frac{F_0}{m}\cos \omega_1 t$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{40}{0.1}\,\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}} = 20\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$A = \frac{F_0}{m} = \frac{10\,\mathrm{N}}{0.1\,\mathrm{kg}} = 100\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$$

$$y_h(t) = C_1\cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t = C_1 \cos 20t + C_2 \sin 20t$$

$$y_p(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega_1^2}\cdot\cos\omega_1 t = \frac{25}{19}\cos 18t$$

$$y(t) = C_1\cos 20t + C_2\sin 20t + \frac{25}{19}\cos 18t$$

$$\dot{y}(t) = -20C_1 \sin 20t + 20C_2\cos 20t - \frac{25}{19}\cdot 18\cdot\sin 18t$$

Lösung des Anfangswertproblems:

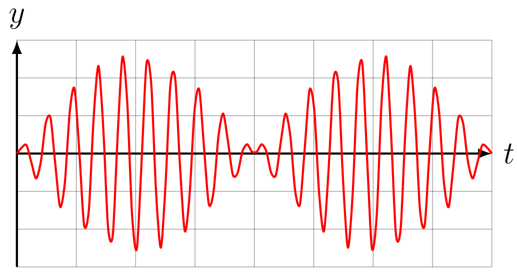
$$y(0) = C_1 + \frac{25}{19} = 0$$

$$\dot{y}(0) = 20C_2 = 0$$

Also: $C_1 = -\frac{25}{19}$, $C_2 = 0$

$$y(t) = \frac{25}{19}(\cos 18t - \cos 20t)\,\mathrm{m}$$

(b)
$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{25}{19}(\cos 18t - \cos 20t) \\ &= \frac{25}{19}\cdot(-2)\cdot\sin t\cdot\sin(-19t) \\ &= \frac{50}{19}\cdot\sin t\cdot\sin 19t \end{aligned}$$



Aufgabe 5.23

Gegeben : $m = 0.5\,\mathrm{kg}$, $\Delta y = 0.49\,\mathrm{m}$, $k = 2\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$

$$D = \frac{F_G}{\Delta y} = \frac{m \cdot g}{\Delta y} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{0.5\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}}{0.49\,\mathrm{m}} = 10.0\,\mathrm{N\,m^{-1}}$$

$$\delta = \frac{k}{2m} = \frac{2\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}}}{2 \cdot 0.5\,\mathrm{kg}} \quad \Rightarrow \quad \delta = 2\,\mathrm{s^{-1}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = 4.47\,\mathrm{s^{-1}}$$

Resonanz tritt dann ein, wenn die Amplitude in $y_i(t)$

$$\frac{A}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right) + 4\delta^2\omega_1^2}}$$

ein Maximum für ω_1 hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right) + 4\delta^2\omega_1^2$$

für ω_1 minimal wird:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega_1}\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right) + 4\delta\omega_1 &= 0 \\ 2\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right) \cdot (-2\omega_1) + 4\delta^2 \cdot 2\omega_1 &= 0 \\ 4\omega_1^2\left(\omega_1^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2\right) &= 0 \end{aligned}$$

Da $\omega_1 = 0$ keine interessante Lösung darstellt, muss der zweite Faktor verschwinden:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2 &= 0 \\ \omega_1 &= \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \end{aligned}$$

Diese Minmalstelle existiert aber nur dann, wenn $\delta < \omega_0/\sqrt{2}$ gilt. Ist das bei unserem Beispiel erfüllt?

$$2\,\mathrm{s^{-1}} < \frac{4.47}{\sqrt{2}}\,\mathrm{s^{-1}} = 3.16\,\mathrm{s^{-1}} \quad \text{(ok)}$$

Resonanzfrequenz:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = 3.46\,\mathrm{s^{-1}}$$