Aufgabe 5.1

Bestimme die Lösung des AWP: $y'' - 6y' + 9y = 0$ mit $y(0) = 2$ und $y'(0) = -1$.

Aufgabe 5.2

Bestimme die Lösung des AWP: $y'' - \frac{1}{6}y' - \frac{1}{6}y = 0$ mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 5$.

Aufgabe 5.3

Bestimme die Lösung des AWP: $y'' + 2y' + 10y = 0$ mit $y(0) = 6$ und $y'(0) = 0$.

Aufgabe 5.4

Bestimme die Lösung des AWP: $y'' + 2y' = 0$ mit $y(0) = 3$ und $y'(0) = 2$.

Aufgabe 5.5

Bestimme die Lösung des AWP: $y'' + 16y = 0$ mit $y(0) = 2$ und $y'(0) = -4$.

Aufgabe 5.6

Stelle den trigonometrischen Term $2\sin\omega t + 3\cos\omega t$ in der Form

(a) $A\sin(\omega t + \gamma)$, (b) $A\cos(\omega t + \delta)$

dar. Die Winkel sind jeweils im Bogenmass anzugeben.

Aufgabe 5.7

Zeige, dass die Funktionen $y_1(x) = C_1 \mathrm{e}^{-\frac{b}{2a}x}$ und $y_2(x) = C_2 x \mathrm{e}^{-\frac{b}{2a}x}$ jeweils die DGL $ay'' + by' + cy = 0$ lösen, wenn die Koeffizienten die Bedingung $b^2 - 4ac = 0$ erfüllen.

Aufgabe 5.8

Wie lautet die Lösung der Differenzialgleichung der erzwungenen *ungedämpften* Schwingung für $\omega_0 \neq \omega_1$.

Aufgabe 5.9

Zeige, dass $y(t) = \dfrac{A}{2\omega_0} t \cdot \sin\omega_0 t$ eine partikuläre Lösung der DGL der erzwungenen ungedämpften Schwingung für $\omega_0 = \omega_1$ ist.

Aufgabe 5.10

Bestimme die Lösung der Gleichung $y'' - 4y + 3y = 6x^2 + 5x + 3$ mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten. Verwende dazu den Ansatz $y(x) = Ax^2 + Bx + C$.

Aufgabe 5.11

Beschreibe qualitativ und vollständig den zur DGL gehörenden Typ der Schwingung.

(a) $\ddot{y} + 4y = 0$

(b) $\ddot{y} + 7\dot{y} + 12y = 0$

(c) $\ddot{y} + 4\dot{y} + 13y = 5\cos(5t)$

Aufgabe 5.12

eine Kraft von 0.5 N verlängere die Feder eines ungedämpften harmonischen Oszillators um 10 cm. An der entspannten Feder werde nun eine Masse von 250 Gramm befestigt, die Feder werde um 5 cm ausgedehnt und dann losgelassen.

(a) Wie gross ist die Federkonstante?

(b) Berechne die Kreisfrequenz, die Frequenz und die Schwingungsdauer des Oszillators.

(c) Bestimme sein Zeit-Weg-Gesetz $y(t)$.

Aufgabe 5.13

Ein ungedämpfter harmonischer Oszillator mit der Masse 2 kg habe eine Schwingungsdauer von 3 s. Berechne die Federkonstante.

Aufgabe 5.14

Eine Kraft von $6 \cdot 10^{-4}$ N strecke eine Feder um 3 cm. An die (entspannte) Feder werde eine Stahlkugel mit einer Masse von 2 Gramm gehängt. Nach Erreichen der statischen Ruhelage werde die Kugel 4 cm über diese Ruhelage gehoben und dann losgelassen.

(a) Bestimme die Amplitude und die Frequenz der Schwingung.

(b) Gib das Weg-Zeit-Gesetz an.

(c) Zu welchen Zeiten ist die Kugel 2 cm über der statischen Ruhelage und wie gross ist dort ihre Geschwindigkeit?

Hinweis: Grundsätzlich müsste man unter dem Einfluss der Schwerkraft im reibungsfreien Fall die DGL $\ddot{y} + \frac{D}{m}y = g$ lösen. Mit der Transformation $y = u + \frac{mg}{D}$ erhält man $\ddot{u} + \frac{D}{m}(u + \frac{mg}{D}) = g$ bzw. $\ddot{u} + \frac{D}{m}u = 0$. Wählt man also die statische Ruhelage als Nullpunkt, verschwindet die Schwerkraft aus der Rechnung.

Aufgabe 5.15

Eine Masse von 100 g dehnt eine Feder um 5 cm. Die Masse wird aus ihrer Gleichgewichtslage mit einer Geschwindigkeit von $10\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ nach unten in Bewegung gesetzt. Der Luftwiderstand kann dabei vernachlässigt werden.

(a) Bestime die Position $y(t)$ der Masse zu einem beliebigen Zeitpunkt $t \geq 0$.

(b) Wann durchläuft die Masse zum ersten Mal ihre Gleichgewichtslage?

Aufgabe 5.16

Eine Masse von 2 kg dehnt eine Feder um 4.9 cm. Die Masse wird um 3.3 cm angehoben und anschliessend mit einer Geschwindigkeit von $1\,\mathrm{m\,s}^{-1}$ nach unten in Bewegung gesetzt. Der Luftwiderstand wird vernachlässigt.

(a) Berechne den Ort der Masse zu einem bestimmten Zeitpunkt $t \geq 0$.

(b) Bestimme die Kreisfrequenz, die Periode, die Amplitude und den Phasenwinkel der Bewegung.

Aufgabe 5.17

Eine Masse von 20 Gramm dehnt in der Ruhelage eine vertikale Feder um 5 cm. Die Masse wird dann noch weitere 2 cm nach unten gezogen und losgelassen. Die nun einsetzende Schwingung findet in einem Medium statt, dass der Bewegung eine Dämpfung von $0.4\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ aufzwingt.

(a) Berechne die Wegfunktion $y(t)$ in Abhängigkeit der Zeit $t \geq 0$ (bezogen auf die statische Ruhleage als Nullpunkt).

(b) Nach wie vielen Sekunden ist die Elongation kleiner als 0.1 mm?

Aufgabe 5.18

Eine Stahlkugel mit dem Radius $r = 1\,\mathrm{cm}$ und der Dichte $\varrho = 8 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ wird an einer Feder mit der Federkonstanten $D = 1.6\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ aufgehängt. Die gesamte Vorrichtung befindet sich in einer Flüssigkeit mit der Viskosität $\eta = 1.48\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.

(a) Zeige, dass sich die Bewegung mit der folgenden DGL beschreiben lässt:

$$\ddot{y} + \frac{9\eta}{2r^2\varrho}\dot{y} + \frac{3D}{4\pi r^3\varrho}y = 0$$

Hinweis: Gesetz von Stokes

(b) Die Kugel werde aus der statischen Ruhelage 4 cm nach unten gezogen und dann losgelassen. Bestimme das Weg-Zeit-Gesetz $y(t)$ und die Schwingungsdauer T.

Aufgabe 5.19

Ein Kleinwagen hat eine Masse von 800 kg. Seine Stossdämpfer haben eine Dämpfung von $1500\,\mathrm{N \cdot s \cdot m^{-1}}$ bei einer Federkonstante mit dem Wert $16\,000\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$. Das Auto wird durch einen Stoss aus seiner vertikalen Ruhelage bewegt. Berechne die Schwingungsdauer und den Faktor, mit dem die Schwingung abklingt.

Aufgabe 5.20

Eine Masse mit einer Gewichtskraft von 39.2 N dehnt eine Feder um 4 cm. Die Bewegung der Masse wird durch eine Vorrichtung mit dem Faktor k gedämpft. Berechne den Wert von k, für den das System kritisch gedämpft ist.

Aufgabe 5.21

Schreibe den Ausdruck als Produkt zweier trigonometrischer Funktionen.

(a) $\cos 9t - \cos 7t$

(b) $\sin 7t - \sin 3t$

(c) $\cos \pi t + \cos 2\pi t$

(d) $\sin 3.6t + \sin 3.2t$

Aufgabe 5.22

Eine Masse von 0.1 kg ist vertikal an einer Feder mit der Federkonstanten $D = 40\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$ befestigt und befindet sich in Ruhe. Auf die Masse wirkt nun eine äussere Kraft von $10\cos(18t)\,\mathrm{N}$.

(a) Bestimme die Position der Masse als Funktion $y(t)$ der Zeit $t \geq 0$.

(b) Zeige, dass es sich um eine Schwebung handelt, indem du die Bewegungsgleichung in ein Produkt umformst und damit die Kreisfrequenzen der Überlagerungsschwingung und der Einhüllenden bestimmst. *Hinweis:* Skizziere mit dem Taschenrechner die Weg-Zeit-Funktion $y(t)$ für $0 \leq t < 2\pi$ und $-3 \leq y \leq 3$.

Aufgabe 5.23

Eine Feder werde durch eine angehängte Masse von 0.5 kg um 0.49 m gedehnt. Das Feder-Masse-System befinde sich in einem Medium, dessen Reibungswiderstand $k = 2\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$ beträgt. Die in ihrer statischen Ruhelage ruhende Masse werde durch eine periodische Kraft gestört.

Zeige, dass Resonanz auftreten kann und berechne die Resonanzfrequenz ω_R.