Aufgabe 2.1

Berechne für $f(x,y) = x^2y^3 - \frac{x}{y} + \sin(xy)$

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}$

(b) $\frac{\partial f}{\partial y}$

(c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

(d) $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

(e) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

(f) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

Aufgabe 2.2

In welchen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ hat die Funktion
$f(x,y) = x^2 - xy + 2y^2 - 5x + 6y - 9$
möglicherweise ein Extremum?

Aufgabe 2.3

In welchen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ hat die Funktion
$f(x,y) = x^3 - y^3 - 12x + 3y - 5$
möglicherweise ein Extremum?

Aufgabe 2.4

Beschreibe die DGL $y'' + x^2 + xy = 0$ so genau wie möglich mit Fachausdrücken.

Aufgabe 2.5

Beschreibe die DGL $y^{(5)} = y$ so genau wie möglich mit Fachausdrücken.

Aufgabe 2.6

Beschreibe die DGL $x^2y' + xy = 0$ so genau wie möglich mit Fachausdrücken.

Aufgabe 2.7

Beschreibe die DGL $(y'')^2 - 5x + \frac{1}{y} = 0$ so genau wie möglich mit Fachausdrücken.

Aufgabe 2.8

Beschreibe die DGL $y^{(4)} = 5y^{(3)} - 4xy'' + y - 1$ so genau wie möglich mit Fachausdrücken.

Aufgabe 2.9

Prüfe nach, ob die angegebene Funktionenschar die Differenzialgleichung auf dem Intervall I löst. C, C_1, und C_2 sind willkürliche reelle Konstanten.

(a) Gleichung: $y' = x + \cos x$
Lösungskandidat: $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sin x + C$ auf $I = \mathbb{R}$

(b) Gleichung: $y' = 2xy$
Lösungskandidat: $y(x) = C\mathrm{e}^{x^2}$ auf $I = \mathbb{R}$

(c) Gleichung: $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$
Lösungskandidat: $y(x) = C_1x + C_2x^2$ auf $I = \mathbb{R}$

Aufgabe 2.10

Bestimme die Werte für r, für welche die gegebenen Differenzialgleichungen Lösungen der Form $y = \mathrm{e}^{rx}$ besitzen.

(a) $y' + 2y = 0$

(b) $y'' + y' - 6y = 0$

Aufgabe 2.11

Zeige, dass die Funktion $y(x) = 2/(2 - x^2)$ für $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ das Anfangswertproblem

$$y' = xy^2 \quad \text{mit } y(0) = 1$$

löst.

Aufgabe 2.12

Zeige, dass die Funktion $y(x) = x - x\ln x$ für $x > 0$ das Anfangswertproblem

$$x^2y'' - xy' + y = 0 \quad \text{mit } y(1) = 1,\ y'(1) = 0 \text{ und } x > 0$$

löst.

Aufgabe 2.13

Zeige, dass die Funktion $y(x) = 3\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^{2x} - \cos 2x$ das Anfangswertproblem

$$y'' - 4y' + 4y + 8\sin 2x = 0 \quad \text{mit } y(0) = 2 \text{ und } y'(0) = 4$$

löst.