Vektorgeometrie

Lösungen+ (6–8)

Aufgabe 6.1

Richtungsvektor: $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix}5\\2\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$

$$g\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.2

Koordinaten von P in die Geradengleichung einsetzen:

$$\begin{array}{rclcrclcrclcl}
14 &=& -1+3t & & 15 &=& 3t & & t &=& 5 & & \\
11 &=& 21-2t & \Rightarrow & -10 &=& -2t & \Rightarrow & t &=& 5 & \Rightarrow & P \notin g \\
7 &=& 12+t & & -5 &=& t & & t &=& -5 & &
\end{array}$$

Aufgabe 6.3

Einfach den Anfangspunkt von g auswechseln:

$$h\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\9\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\5\\-6\end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.4

$$g\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.5

$$g\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-3\\4\\6\end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.6

Richtungsvektor: $\vec{v} = \begin{pmatrix}-6\\4\\10\end{pmatrix}$

$$g\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\0\\-3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.7

Mittelpunkt: $r_M = \frac{1}{2}\big(\vec{r}_A + \vec{r}_B\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M(1,-4,4)$

$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6.8

Schwerpunkt: $S(4,1,1)$

$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6.9

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 17 \\ -18 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \times \vec{n} = \begin{pmatrix} 87 \\ 58 \\ -87 \end{pmatrix} = 29 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$h_c\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6.10

- $\begin{aligned} -2 &= 2 + 2t \\ -1 &= 3 + 2t \\ 7 &= 1 - 3t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} t &= -2 \\ t &= -2 \\ t &= -2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad P \in g$

- $\begin{aligned} 8 &= 2 + 2t \\ 9 &= 3 + 2t \\ 8 &= 1 - 3t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} t &= 3 \\ t &= 3 \\ t &= -7/3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad Q \notin g$

- $\begin{aligned} 4 &= 2 + 2t \\ 5 &= 3 + 2t \\ -2 &= 1 - 3t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} t &= 1 \\ t &= 1 \\ t &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad R \in g$

Aufgabe 6.11

g ist parallel zur x-Achse.

Aufgabe 6.12

g geht durch den Ursprung.

Aufgabe 6.13

g ist parallel zur xz-Ebene (π_3).

Aufgabe 6.14

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.15

$S_1(3,1,0)$, S_2 existiert nicht, $S_3(3,0,2)$

Aufgabe 6.16

$t_1 = \frac{3}{8} = \frac{105}{280}$
$t_2 = \frac{1}{5} = \frac{56}{280}$
$t_3 = \frac{5}{7} = \frac{200}{280}$

$t_2 < t_1 < t_3$

S_1 teilt die Strecke zwischen S_2 und S_3 im Verhältnis $49 : 95$.

Aufgabe 6.17

- $\vec{v}_h$ und $\vec{v}_g$ sind kollinear $\left(\vec{v}_h = -3\vec{v}_g\right)$
- $A_g(5,2,-2) \in h$.

g und h sind identisch

Aufgabe 6.18

- $\vec{v}_h$ und $\vec{v}_g$ sind kollinear $\left(\vec{v}_h = 2\vec{v}_g\right)$,
- $A_g(-2|0|-2) \notin h$.

$g \parallel h$

Aufgabe 6.19

- $\vec{v}_h$ und $\vec{v}_g$ sind nicht kollinear
- Das Gleichungssystem $A_g + s\vec{v}_g = A_h + t\vec{v}_h$ hat genau eine Lösung: $s = -3$, $t = 2$.

Die Geraden schneiden sich

Aufgabe 6.20

- $\vec{v}_h$ und $\vec{v}_g$ sind nicht kollinear
- das Gleichungssystem $A_g + s\vec{v}_g = A_h + t\vec{v}_h$ hat keine Lösung.

g und h sind windschief

Aufgabe 6.21

Richtungsvektoren: nicht kollinear

$$\begin{aligned} 5+2s &= 2-t \\ 5+s &= 2+t \\ 2s &= -5+t \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} 2s+t &= -3 \\ s-t &= -3 \\ 2s-t &= -5 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} s &= -2 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

Schnittpunkt: $S(1,3,-4)$

Schnittwinkel:

$$\varphi = \arccos \frac{\left|\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right|} = \arccos \frac{1}{3\sqrt{3}} = 78.90^\circ$$

Aufgabe 6.22

Schnittpunkt $g \cap h$:

$$\begin{aligned} -3+3s &= -16+8t \\ 5-5s &= -6+3t \\ -2+9s &= 9-t \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} 3s-8t &= -13 \\ -5s-3t &= -11 \\ 9s+t &= 11 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} s &= 1 \\ t &= 2 \end{aligned}$$

Schnittpunkt: $S(0,0,7)$

spitzer Schnittwinkel:

$$\varphi = \arccos \frac{\left|\begin{pmatrix}3\\-5\\9\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}8\\3\\-1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}3\\-5\\9\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}8\\3\\-1\end{pmatrix}\right|} = \arccos \frac{0}{\sqrt{115} \cdot \sqrt{74}} = 90^\circ$$

Aufgabe 6.23

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_A + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T_1(-1,3,0)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_A + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \tfrac{2}{3}\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T_2(2,1,2)$$

Aufgabe 6.24

$$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \cdot \vec{v} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_F = \vec{r}_A + \overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad F(-2,0,1)$$

$$d(P,g) = \left|\vec{r}_F - \vec{r}_P\right| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = 7$$

Aufgabe 6.25

$$\vec{v}_g \times \vec{v}_h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -49 \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$d(g,h) = \frac{\left|(\vec{v}_g \times \vec{v}_h) \cdot \overrightarrow{AB}\,\right|}{\left|\vec{v}_g \times \vec{v}_h\,\right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -49 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -49 \end{pmatrix} \right|}$$

$$= \frac{490}{49} = 10$$

Aufgabe 6.26

Schnittpunkt: $S(5, 8, 1)$

$$w_1\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 22 \\ 5 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$w_2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.27

Der Richtungsvektor $\vec{v}_h$ des Lots steht senkrecht auf dem Richtungsvektor $\vec{v}_g$ und der Ebene, die durch den Punkt P und die Gerade g aufgespannt wird:

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_h = \vec{v}_g \times \left(\vec{v}_g \times \overrightarrow{AP}\right) = \begin{pmatrix} 25 \\ -54 \\ -21 \end{pmatrix}$$

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 25 \\ -54 \\ -21 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.28

Durch die Projektion auf die xy-Ebene werden alle z-Komponenten zu Null.

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.29

$P(6-3t, -8+4t, 3+t) \in g$

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{QP}| &= 3 \\
\left|\begin{pmatrix} 6-3t \\ -8+4t \\ 3+t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| &= 3 \\
\left|\begin{pmatrix} 5-3t \\ -6+4t \\ t \end{pmatrix}\right| &= 3 \\
\sqrt{(5-3t)^2 + (-6+4t)^2 + t^2} &= 3 \\
(5-3t)^2 + (-6+4t)^2 + t^2 &= 9 \\
25 - 30t + 9t^2 + 36 - 48t + 16t^2 + t^2 &= 9 \\
26t^2 - 78t + 52 &= 0 \\
t^2 - 3t + 2 &= 0 \\
(t-1)(t-2) &= 0 \\
t_1 &= 1 \quad \Rightarrow \quad P_1(3, -4, 4) \\
t_2 &= 2 \quad \Rightarrow \quad P_1(0, 0, 5)
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.30

(a) $\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}; \; \vec{v} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} + 15\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 26 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C(39, 26, 6)$

(c)

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{OP}| &= 7 \\
\left| \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -6+3t \\ -4+2t \\ -9+t \end{pmatrix} \right| &= 7 \\
\sqrt{(-6+3t)^2 + (-4+2t)^2 + (-9+t)^2} &= 7 \quad ||^2 \\
36 + 16 + 81 - 36t - 16t - 18t + 9t^2 + 4t^2 + t^2 &= 49 \\
133 - 70t + 14t^2 &= 49 \\
14t^2 - 70t + 84 &= 0 \\
t^2 - 5t + 6 &= 0 \\
(t-2)(t-3) &= 0
\end{aligned}
$$

nach $t = 2$ und $t = 3$ Sekunden

Aufgabe 7.1

(a) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -4$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = -4$

$\varepsilon\colon x - 4 = 0$

(b) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = 14$

$\varepsilon\colon x - 2y + 14 = 0$

(c) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ -8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 92 \\ -23 \\ 23 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -20$

$\varepsilon\colon 4x - y + z - 20 = 0$

(d) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 32 \\ 16 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -11$

$\varepsilon\colon 5x + 4y + 2z - 11 = 0$

Aufgabe 7.2

(a) $\overrightarrow{AP} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -2$

$\varepsilon\colon 2x + 2y + z - 2 = 0$

(b) $\overrightarrow{AP} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 22 \\ 47 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -22 \\ -47 \end{pmatrix}$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -50$

$\varepsilon\colon 2x - 22y - 47z - 50 = 0$

Aufgabe 7.3

(a) $\overrightarrow{AB} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = 1$

$\varepsilon\colon 3x + 4y - 5z + 1 = 0$

(b) $\overrightarrow{AB} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{n}$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -5$

$\varepsilon\colon 9\,x + 5\,y + 2\,z - 5 = 0$

Aufgabe 7.4

$A(2,0,1)$, $B(1,2,0)$, $C(1,1,2)$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -7$

$3x + 2y + z - 7 = 0$

Aufgabe 7.5

(a) Parallel zur xy-Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_P = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 6$

$\varepsilon\colon z + 6 = 0$

(b) Parallel zur xz-Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_P = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = -9$

$\varepsilon\colon y - 9 = 0$

Aufgabe 7.6

(a) $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$; $d = -\vec{n}\cdot\vec{r}_P = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\8\\-5\end{pmatrix} = 5$

$\varepsilon\colon x + y + 3z + 5 = 0$

(b) $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\7\\5\end{pmatrix}$; $d = -\vec{n}\cdot\vec{r}_P = \begin{pmatrix}2\\7\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix} = -23$

$\varepsilon\colon 2x + 7y + 5z - 23 = 0$

Aufgabe 7.7

Um zu zeigen, dass sich die Geraden schneiden, kann man mit Hilfe des entsprechenden Gleichungssystems herausfinden, ob ein Schnittpunkt existiert.

Oder man bestimmt einen Normalenvektor $\vec{n}$ der beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, den man sowieso für die Koordinatengleichung benötigt, und prüft, ob $\vec{n}$ senkrecht zum Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ steht. Damit schliesst man aus, dass g und h windschief sind.

(a) Die Geraden schneiden sich offensichtlich im Punkt $S(1, 4, 8)$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\17\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \vec{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$d = -\vec{n}\cdot\vec{r}_A = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\8\end{pmatrix} = -8$$

$\varepsilon\colon z - 8 = 0$

(b) $$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{pmatrix}5\\7\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\-8\\4\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \vec{n} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix} = 0 \quad\Rightarrow\quad g\cap h \neq \{\,\}$$

$d = -\vec{n}\cdot\vec{r}_A = 10$

$\varepsilon\colon 3\,x - 2\,y + z - 10 = 0$

(c) $$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\-12\\3\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \vec{n} = \begin{pmatrix}8\\12\\-3\end{pmatrix}$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -16 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad g \cap h \neq \{\,\}$$

$$d = -\vec{n}\cdot\vec{r}_A = 16$$

$$\varepsilon\colon 8\,x + 12\,y - 3\,z - 16 = 0$$

Aufgabe 7.8

(a) $\varepsilon\colon 2y - z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

zweitprojizierend (senkrecht zur yz-Ebene)

(b) $\varepsilon\colon x + y - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

erstprojizierend (senkrecht zur xy-Ebene)

(c) $\varepsilon\colon 2x + 3z - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

drittprojizierend (senkrecht zur xz-Ebene)

(d) $\varepsilon\colon x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

zweite Hauptebene (parallel zur yz-Ebene)

(e) $z + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

erste Hauptebene (parallel zur xy-Ebene)

(f) $\varepsilon\colon y = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

xz-Ebene

Aufgabe 7.9

(a) $a = 3,\ b = -2,\ c = 6$

(b) $b = -4,\ c = 3$

(c) $a = -2.5,\ b = -2,\ c = 5$

(d) $a = b = c = 0$

Aufgabe 7.10

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{r}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix} = \vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_a = -\begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -abc$$

$$\varepsilon\colon bcx + acy + abz - abc = 0 \quad || : abc$$

$$\frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y + \frac{1}{c}z - 1 = 0 \quad \text{(Achsenabschnittsform)}$$

Aufgabe 7.11

Achsenabschnittsform der Ebenengleichung im Raum:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{x}{c} - 1 = 0$$

Fehlt ein Achsenabschnitt, so kann man ihn rechnerisch mit ∞ berücksichtigen.

(a) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\colon 3x + 3y + 2z - 6 = 0$

(b) $\frac{x}{3} + \frac{y}{\infty} - \frac{z}{7} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\colon 7x - 3z - 21 = 0$

(c) $\frac{x}{1} - \frac{y}{4} + \frac{z}{2} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\colon 4x - y + 2z - 4 = 0$

(d) Bei Ebenen, die durch den Ursprung gehen, d. h. $d = 0$ gilt, ist die Achsenabschnittsform nicht definert.

Aufgabe 7.12

(a) $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\3\\5\end{pmatrix} = \vec{n}$

$$d = -\vec{n}\cdot\vec{r}_A = -\begin{pmatrix}-7\\3\\5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix} = 25$$

$\varepsilon\colon 7x - 3y - 5z - 25 = 0$

(b) $\begin{pmatrix}4\\0\\5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-18\\4\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}5\\18\\-4\end{pmatrix} = -\vec{n}$

$$d = -\vec{n}\cdot\vec{r}_A = -\begin{pmatrix}5\\18\\-4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\7\\-2\end{pmatrix} = 139$$

$\varepsilon\colon 5x + 18y - 4z + 139 = 0$

Aufgabe 7.13

(a) $\varepsilon\colon 5x - 2y + z - 6 = 0$

Setze $x = s$ und $y = t$: $z = 6 - 5s + 2t$

$$\varepsilon\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\-5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

(b) $\varepsilon\colon 4y - z + 7 = 0$

Setze $x = s$ und $y = t$: $z = 7 + 4t$

$$\varepsilon\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\7\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$$

(c) $\varepsilon\colon 2x + 4y - 6z + 1 = 0$

Setze $y = s$ und $z = t$: $x = -0.5 - 2y + 3t$

$$\varepsilon\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0.5\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$$

(d) $\varepsilon\colon 3z - 5 = 0$

Setze $x = s$ und $y = t$: $z = 5/3$

$$\varepsilon\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5/3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.14

(a) $\varepsilon\colon x - 3y + 2z - 6 = 0$

- 1. Spur ($z = 0$): $x - 3y - 6 = 0$

  $$y = t\colon x = 6 + 3t \quad \Rightarrow \quad s_1\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 2. Spur ($x = 0$): $-3y + 2z - 6 = 0$

  $$y = t\colon z = 3 + 1.5t \quad \Rightarrow \quad s_2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

- 3. Spur ($y = 0$): $x + 2z - 6 = 0$

  $$z = t\colon x = 6 - 2t \quad \Rightarrow \quad s_3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) $\varepsilon\colon 3y + 5z - 15 = 0$

- 1. Spur ($z = 0$): $3y - 15 = 0$

  $$x = t\colon y = 5 \quad \Rightarrow \quad s_1\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 2. Spur ($x = 0$): $-3y + 5z - 15 = 0$

  $$z = t\colon y = -5 + \tfrac{5}{3}t \quad \Rightarrow \quad s_2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- 3. Spur ($y = 0$): $5z - 15 = 0$

  $$x = t\colon z = 3 \quad \Rightarrow \quad s_3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.15

(a) $3 \cdot 5 - 2 \cdot (-2) - 5 \cdot 6 + 11 = 0$

$$15 + 4 - 30 + 11 = 0$$

$$0 = 0 \quad \Rightarrow \quad P \in \varepsilon$$

(b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$1 = -s + 4t \quad (1)$

$2 = 2s - 4t \quad (2)$

$3 = 2s - 3t \quad (3)$

aus (1) und (2) folgt $s = 3$ und $t = 1$

Einsetzen in (3) ergibt: $0 = 0 \quad \Rightarrow \quad P \in \varepsilon$

Aufgabe 7.16

$\varepsilon \colon 3x - 2y + z - 4 = 0$

(a) $P(0, 0, z) \in \varepsilon$:

$z - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 4 \quad \Rightarrow \quad P(0, 0, 4)$

(b) $P(t, t, t) \in \varepsilon$:

$3t - 2t + t - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2 \quad \Rightarrow \quad P(2, 2, 2)$

(c) $P(1, -5, z) \in \varepsilon$

$3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + z - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -9 \quad \Rightarrow \quad P(1, -5, -9)$

(d) $P(2, y, 4) \in \varepsilon$

$3 \cdot 2 - 2y + 4 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 3 \quad \Rightarrow \quad P(2, 3, 4)$

Aufgabe 7.17

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_1 = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}; \vec{n}_2 = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Punkte liegen nicht in einer Ebene.

Aufgabe 7.18

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 8 \\ x + y - 3z &= -4 \quad \Rightarrow \quad S(4,4,4) \\ 4x + 3y - 5z &= 8 \end{aligned}$$

Aufgabe 7.19

Bestimme zunächst die Achsenabschnitte:

$A(a,0,0) \quad \Rightarrow \quad a = 16$

$B(0,b,0) \quad \Rightarrow \quad b = 9$

$C(0,0,c) \quad \Rightarrow \quad c = 144/p$

Sind a, b und c die Achsenabschnitte der Ebene, so gilt:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6}|abc| \\ 384 &= \frac{1}{6}\left|16 \cdot 9 \cdot \frac{144}{p}\right| \\ 384 \cdot |p| &= 8 \cdot 3 \cdot 144 \\ |p| &= 9 \\ p &= \pm 9 \end{aligned}$$

Aufgabe 7.20

(a) $\varepsilon\colon 2y - z - 1 = 0$ Ebene parallel zur x-Achse

(b) $\varepsilon\colon 5x - 2y + 7z = 0$ Ebene durch den Ursprung

(c) $\varepsilon\colon y = 4 - x$ Ebene parallel zur z-Achse

(d) $\varepsilon\colon z = 3$ Ebene parallel zur xy-Ebene

Aufgabe 7.21

(a) $t_0 = 1$, $S(4,-6,7)$

(b) $g \parallel \varepsilon$

(c) $t_0 = 4$, $S(41,31,-40)$

(d) $g \subset \varepsilon$

Aufgabe 7.22

(a) $1 + 2t = 9 - 7r + 5s$
$1 + t = 2 + 4r - 8s$
$3 - t = 6 + 6r + 2s$

$$\begin{aligned} 2t + 7r - 5s &= 8 \\ t - 4r + 8s &= 1 \\ -t - 6r - 2s &= 3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} t &= 5 \\ r &= -1 \\ s &= -1 \end{aligned}$$

$t = 5$ in g einsetzen: $S(11, 6, -2)$

(b) $5 + 6t = 8 + 2r + 5s$
$7 + 8t = -4 - 4r + 5s$
$1 + 7t = 5 + 7r + 7s$

$$\begin{aligned} 6t - 2r - 5s &= 3 \\ 8t + 4r - 5s &= -11 \\ 7t - 7r - 7s &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{keine Lösung}$$

$g \parallel \varepsilon$

(c) $1 + 6t = 3 + 0r + 4s$
$0 - 9t = 5 + 3r - 5s$
$7 + 8t = -1 - 4r + 4s$

$$\begin{aligned} 6t + 0r - 4s &= 2 \\ -9t - 3r + 5s &= 5 \\ 8t + 4r - 4s &= -8 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{unendliche viele Lösungen}$$

$g \subset \varepsilon$

Aufgabe 7.23

(a) $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} 4x + 2y + 5z + 5 &= 0 \\ 6x + 4y + 9z - 7 &= 0 \\ x + 3y - 2z + 0 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad P(-11, 7, 5)$$

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(b) $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}5\\8\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} x + y + 3 &= 0 \\ 5x + 8y + 3z - 3 &= 0 \quad \Rightarrow \quad P(-4, 1, 5) \\ x - y + z + 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$g\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\1\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.24

(a) $2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -4$

$\delta\colon 2x - 3y + 5z - 4 = 0;$

(b) $7 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) - 8 \cdot 4 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 15$

$\delta\colon 7x + 2y - 8z + 15 = 0;$

Aufgabe 7.25

(a) $\vec{n}_\delta = \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$

$1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 - 9 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 1$

$\delta\colon x + 3y - z + 1 = 0$

(b) $2 \cdot 4 + 1 \cdot (-5) + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -3$

$\delta\colon 2x - y - 3 = 0$

Aufgabe 7.26

(a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}6\\-8\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-12\\6\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix} = 2\vec{n}$

$\vec{r}_M = \frac{1}{2}\left(\vec{r}_A + \vec{r}_B\right) = \begin{pmatrix}4\\-2\\4\end{pmatrix}$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = -\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\-2\\4\end{pmatrix} = -32$

$\mu\colon 2x - 6y + 3z - 32 = 0$

(b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}5\\9\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\-5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\14\\-2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}0\\7\\-1\end{pmatrix} = 2\vec{n}$

$\vec{r}_M = \frac{1}{2}\left(\vec{r}_A + \vec{r}_B\right) = \begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}$

$d = -\vec{n}\cdot\vec{r}_M = -\begin{pmatrix}0\\7\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix} = -11$

$\mu\colon 7y - z - 11 = 0$

Aufgabe 7.27

(a) $M_{AB} = (1,3,-3)$; $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4\\2\\-8\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix} = 2\vec{n}$

$d = -\vec{n}\cdot\vec{r}_M = -17$

$\mu\colon 2x + y - 4z - 17 = 0$ (Mittelnormalebene)

$$\begin{aligned}\mu\cap g\colon 2(3+t) + (-2-t) - 4(2+2t) - 17 &= 0\\ -21 - 7t &= 0\\ t &= -3\end{aligned}$$

$P(0,1,-4)$

Aufgabe 7.27

(b) $M_{AB} = (1,4,1)$; $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}8\\-4\\-8\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} = 4\vec{n}$

$d = -\vec{n}\cdot\vec{r}_M = -\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} = 4$

$\mu\colon 2x - y - 2z + 4 = 0$

$$\begin{aligned}\mu\cap g\colon 2(-1-t) - (4+2t) - 2(5+t) + 4 &= 0\\ -12 - 6t &= 0\\ t &= -2\end{aligned}$$

$P(-2,-16,-10)$

Aufgabe 7.28

(a) $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \vec{n}_\delta$$

$$d_\delta = -\vec{n}_\delta \cdot \vec{r}_P = -\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = -(-3+12) = -9$$

$\delta\colon 3x - 4y - 10z + 9 = 0$

Aufgabe 7.28

(b) $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

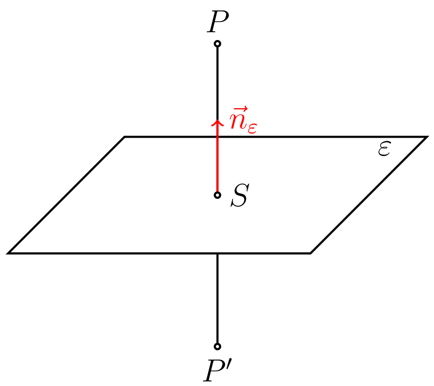
$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 \\ 38 \\ 7 \end{pmatrix} = \vec{n}_\delta$$

$$d_\delta = -\vec{n}_\delta \cdot \vec{r}_P = -\begin{pmatrix} -29 \\ 38 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 51$$

$\delta\colon 29x - 38y - 7z - 51 = 0$

Aufgabe 7.29

Lösungsidee: Lege eine zu ε normale Gerade durch P, schneide sie mit ε und verdopple den Wert des Parameters t, um direkt vom Punkt P zum Punkt P' zu gelangen.



(a) $\vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} g \cap \varepsilon\colon 4(0+4t) - 3(4-3t) + (-5+t) + 4 &= 0 \\ 26t - 13 &= 0 \\ t &= 0.5 \end{aligned}$$

Mit $t = 0.5$ erreichen wir also vom Punkt P aus die Ebene ε. Mit dem doppelten Wert $2t = 1$ gelangen wir zum gesuchten Spiegelpunkt P' von P.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P'(4, 1, -4)$$

(b) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} g \cap \varepsilon\colon 1 \cdot (4+t) - 2 \cdot (-2t) + 3 \cdot (-2+3t) - 5 &= 0 \\ -7 + 14t &= 0 \\ t &= 0.5 \end{aligned}$$

$t' = 2t = 1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P'(5, -2, 1)$$

(c) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$; $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 17 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$

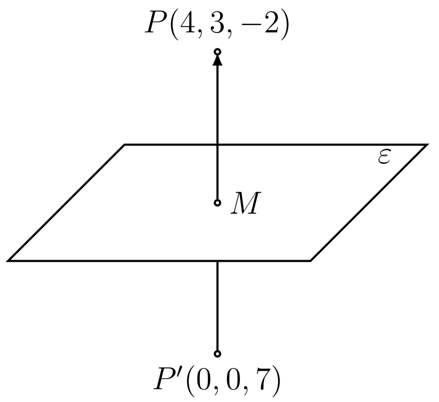
$$\begin{aligned} g \cap \varepsilon\colon 3 \cdot (-1+3t) - 8 \cdot (17-8t) - 7 &= 0 \\ -146 + 73t &= 0 \\ t &= 2 \end{aligned}$$

$t' = 2t = 4$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 17 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P'(11, -6, -15)$$

Aufgabe 7.30

Lösungsidee: Wenn P und P' Spiegelpunkte sind, so ist die Spiegelebene gerade die Mittelnormalebene.



$$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon\colon\ 4x + 3y - 9z + d = 0$

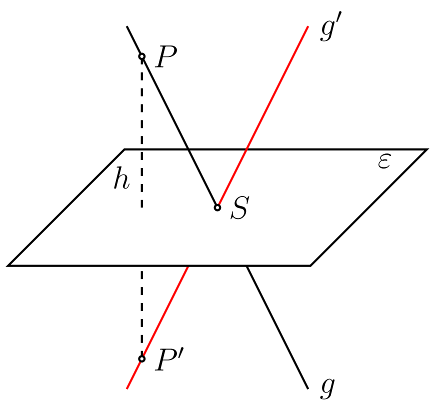
Mittelpunkt der Strecke PP': $M(2, 1.5, 2.5) \in \varepsilon$

$$d_\varepsilon = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = -\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} = -(8 + 4.5 - 22.5) = 10$$

$\varepsilon\colon\ 4x + 3y - 9z + 10 = 0$

Aufgabe 7.31

Lösungsidee: Wähle einen Punkt $P \in g$ mit $P \notin \varepsilon$ und spiegle ihn an der Ebene ε. Die Gerade g' durch den Spiegelpunkt P' und den Schnittpunkt $g \cap \varepsilon = S$ ist die gesuchte gespiegelte Gerade g'.



(a) $P(7, -2, 4) \in g \quad \Rightarrow \quad h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
h \cap \varepsilon\colon 4(7+4t)+2(-2+2t)-(4-t)+1 &= 0\\
21+21t &= 0\\
t &= -1
\end{aligned}
$$

$t' = -2$ in h einsetzen: $P'(-1,-6,6)$

$$
\begin{aligned}
g \cap \varepsilon\colon 4(7+2t)+2(-2)-(4+t)+1 &= 0\\
7t+21 &= 0\\
t &= -3
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \quad S(1,-2,1)$

$$\overrightarrow{SP'} = \begin{pmatrix} 2\\ 4\\ -5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad g'\colon \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2\\ 4\\ -5 \end{pmatrix}$$

(Man hätte auch P' als Anfangspunkt wählen können.)

(b) $P(-1,-1,1) \in g \quad \Rightarrow \quad h\colon \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\\ -1\\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3\\ 4\\ 3 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
h \cap \varepsilon\colon (-1-3t)-3(-1+4t)-2(1+3t)+42 &= 0\\
42+14t &= 0\\
t &= -3
\end{aligned}
$$

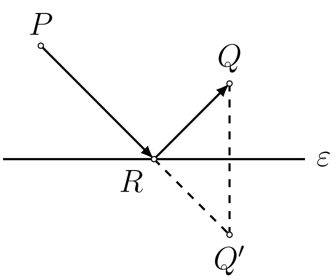
$t' = -6$ in h einsetzen: $P'(-7,17,13)$

$$
\begin{aligned}
g \cap \varepsilon\colon (-1-3t)-3(-2)-2(1+3t)+42 &= 0\\
42-21t &= 0\\
t &= 2
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \quad S(-7,7,7)$

$$\overrightarrow{SP'} = \begin{pmatrix} 0\\ -10\\ -6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad g'\colon \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7\\ 7\\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0\\ 5\\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.32



- Q an ε spiegeln $\to Q'$

- $(PQ') \cap \varepsilon \to R$

oder (nicht eingezeichnet):

- P an ε spiegeln $\to P'$
- $(P'Q) \cap \varepsilon \to R$

$$h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h \cap \varepsilon\colon 5(7+5t) - 2(-1-2t) + 3(8+3t) - 23 = 0$$
$$t = -1$$

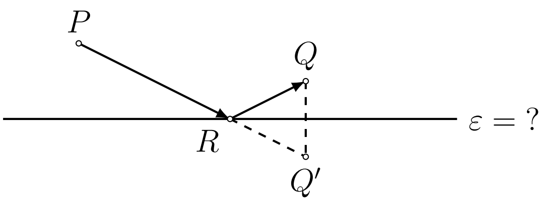
$t' = 2 \cdot (-1)$ in h einsetzen: $\quad \Rightarrow \quad Q'(-3, 3, 2)$

$$g(PQ')\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$g \cap \varepsilon\colon 5(7-5t) - 2(-7+5t) + 3(4-t) - 23 = 0$$
$$t = -1$$

$R(2, -2, 3)$

Aufgabe 7.33



- Q' bestimmen.
- ε ist die Mittelnormalebene von Q und Q'.

$$\vec{r}_{Q'} = \vec{r}_R + \frac{|\overrightarrow{RQ}|}{|\overrightarrow{PR}|} \cdot \overrightarrow{PR}$$

$$\overrightarrow{RQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{Q'} = \vec{r}_R + \frac{|\overrightarrow{RQ}|}{|\overrightarrow{PR}|} \cdot \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{2\sqrt{38}}{3\sqrt{38}} \cdot (-3) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Q'(-1, -3, 14)$$

$$\overrightarrow{QQ'} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ 12 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = -4\vec{n}$$

$M_{QQ'}(1, 5, 8)$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = -\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = 3$$

$\varepsilon\colon x + 4y - 3z + 3 = 0$

Aufgabe 7.34

(a) $\vec{n}_\varepsilon = (5, -1, -6)^{\mathrm{T}}$, $\vec{n}_\delta = (4, 0, 1)^{\mathrm{T}}$

$$\sphericalangle(\varepsilon, \delta) = \sphericalangle(\vec{n}_\varepsilon, \vec{n}_\delta)$$

$$= \arccos \frac{|\vec{n}_\varepsilon \cdot \vec{n}_\delta|}{|\vec{n}_\varepsilon| \cdot |\vec{n}_\delta|}$$

$$= \arccos \frac{|5 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 + (-6) \cdot 1|}{\sqrt{5^2 + 1^2 + 6^2} \cdot \sqrt{4^2 + 0^2 + 1^2}}$$

$$= \arccos \frac{14}{\sqrt{62} \cdot \sqrt{17}} = 64.45°$$

(b) $\vec{n}_\varepsilon = (3, -2, 5)^{\mathrm{T}}$

Einen Normalenvektor von δ erhält man über das Kreuzprodukt des Richtungsvektors $\vec{v}$ von g und einem weiteren Richtungsvektor dieser Ebene, nämlich dem Vektor zwischen dem Punkt P und dem Punkt $A(2, 2, 1)$ der Geraden g.

$$\vec{v} \times \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ -14 \end{pmatrix} = \vec{n}_\delta$$

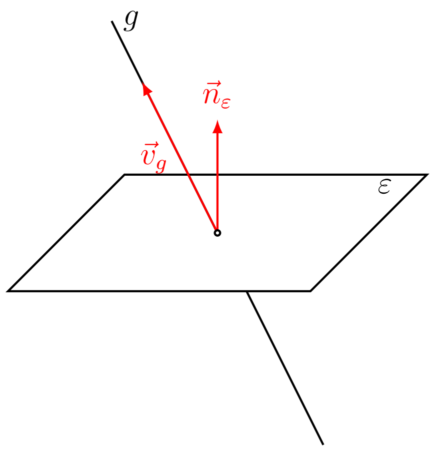
$$\sphericalangle(\varepsilon, \delta) = \sphericalangle(\vec{n}_\varepsilon, \vec{n}_\delta) = \arccos \frac{|\vec{n}_\varepsilon \cdot \vec{n}_\delta|}{|\vec{n}_\varepsilon| \cdot |\vec{n}_\delta|}$$

$$= \arccos \frac{35}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{374}} = 72.93°$$

(c) $\sphericalangle(\varepsilon, \delta) = \cdots = 48.00°$

Aufgabe 7.35

Lösungsidee: Berechne den spitzen Schnittwinkel φ' zwischen einem Richtungsvektor $\vec{v}_g$ der Geraden g und einem Normalenvektor $\vec{n}_\varepsilon$ der Ebene ε und ergänze diesen Winkel auf $90°$.



(a) Richtungsvektor der Geraden: $\vec{v}_g = (2, 1, -2)^{\mathrm{T}}$

Normalenvektor der Ebene: $\vec{n}_\varepsilon = (3, -4, 0)^{\mathrm{T}}$

$$\varphi' = \arccos \frac{\left|\vec{v}_g \cdot \vec{n}_\varepsilon\right|}{\left|\vec{v}_g\right| \cdot \left|\vec{n}_\varepsilon\right|} = \arccos \frac{|6-4+0|}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{9+16}}$$

$$= \arccos \frac{2}{15} = 82.34°$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = 90° - 82.34° = 7.66°$$

oder direkt: $\sphericalangle\big(g, \varepsilon\big) = \arcsin \frac{2}{15} = 7.66°$

(b) Richtungsvektor der Geraden: $\vec{v}_g = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der Ebene: $\vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\varphi' = \arccos \frac{\left|\vec{v}_g \cdot \vec{n}_\varepsilon\right|}{\left|\vec{v}_g\right| \cdot \left|\vec{n}_\varepsilon\right|} = \arccos \frac{|6-5-1|}{\sqrt{9+1+1}\sqrt{4+25+1}}$$

$$= \arccos \frac{0}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{30}} = 90°$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = 90° - 90° = 0°$$

geometrische Deutung: $g \parallel \varepsilon$

Aufgabe 7.36

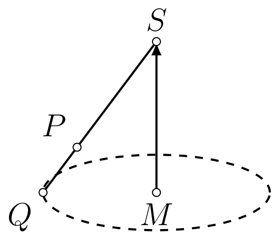
Normalenvektor der xy-Ebene: $\vec{n}_1 = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$

Normalenvektor von ε: $\vec{n}_\varepsilon = (4,0,c)^{\mathrm{T}}$

$$\begin{aligned}
\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_\varepsilon}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_\varepsilon|} &= \cos 45^\circ \\
\frac{c}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{16+c^2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
2c &= \sqrt{2}\sqrt{16+c^2} \\
4c^2 &= 2(16+c^2) \\
2c^2 &= 16+c^2 \\
c^2 &= 16 \\
c &= \pm 4
\end{aligned}$$

Aufgabe 7.37

Da bei einem *geraden* Kreiskegel die Kegelachse *senkrecht* auf der Grundkreisebene steht, ist der Vektor $\overrightarrow{MS}$ ein Normalenvektor der Grundkreisebene.



$$\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_M = 5 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\colon 10x + 2y - 11z + 5 = 0$

$g(SP) \cap \varepsilon \to Q$:

$$\overrightarrow{SP} = \cdots = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 14 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$g \cap \varepsilon$: $10(-7+4t) + 2(-3+t) - 11(14-3t) + 5 = 0$

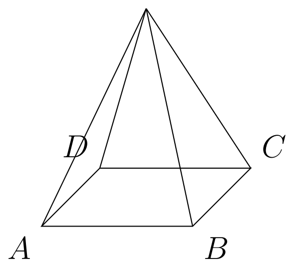
$-225 + 75t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 3 \quad \Rightarrow \quad Q(5,0,5)$

Kegelradius: $r = |\overrightarrow{MQ}| = \cdots = 3$

Kegelhöhe: $h = |\overrightarrow{MS}| = \cdots = 15$

Kegelvolumen: $\frac{1}{3}\pi r^2 h = 45\pi$

Aufgabe 7.38



(a) $\overrightarrow{AB} = (-6, -3, -6)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{BC} = (6, y+1, z+5)^{\mathrm{T}}$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}| &= |\overrightarrow{BC}| \\ \sqrt{36+9+36} &= \sqrt{36+(y+1)^2+(z+5)^2} \\ 81 &= 36 + y^2 + 2y + 1 + z^2 + 10z + 25 \\ 0 &= y^2 + 2y + z^2 + 10z - 19 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\begin{aligned} -36 - 3y - 3 - 6z - 30 &= 0 \\ y &= -2z - 23 \quad (2) \end{aligned}$$

(2) in (1) einsetzen:

$$\begin{aligned} y^2 + 2y + z^2 + 10z - 19 &= 0 \\ (-2z-23)^2 + 2(-2z-23) + z^2 + 10z - 19 &= 0 \\ 4z^2 + 92z + 529 - 4z - 46 + z^2 + 10z + 53 &= 0 \\ 5z^2 + 98z + 464 &= 0 \end{aligned}$$

$z_1 = -8 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -7$

$z_2 = -11.6 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 0.2$

$\Rightarrow C(3, -7, -8)$

Die zweite Lösung entfällt, da die Koordinaten ganzzahlig sein müssen.

(b) $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3V}{G} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3 \cdot 324}{9 \cdot 9} = 12$

$$\vec{r}_M = \tfrac{1}{2}\big(\vec{r}_A + \vec{r}_C\big) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2.5 \\ -3.5 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor der Grundfläche:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ -54 \\ 54 \end{pmatrix}; \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{S_1} = \vec{r}_M + 12 \cdot \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 3 \\ -2.5 \\ -3.5 \end{pmatrix} + 12 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5.5 \\ -11.5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad S_1(7, 5.5, -11.5)$

$$\vec{r}_{S_1} = \vec{r}_M + 12 \cdot \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 3 \\ -2.5 \\ -3.5 \end{pmatrix} - 12 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -10.5 \\ 4.5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad S_2(-1, -10.5, 4.5)$

Aufgabe 7.39

(a) $d(P, \varepsilon) = \dfrac{|4 \cdot 3 + 7 \cdot 5 - 4 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{4^2 + 7^2 + 4^2}} = \dfrac{45}{9} = 5$

(b) $d(P, \varepsilon) = \dfrac{|6 \cdot 7 - 9 \cdot (-2) - 2 \cdot (-5) + 7|}{\sqrt{6^2 + 9^2 + 2^2}} = \dfrac{77}{11} = 7$

(c) $d(P, \varepsilon) = \dfrac{|15 \cdot (-4) + 8 \cdot 0 - 8|}{\sqrt{15^2 + 8^2 + 0^2}} = \dfrac{68}{17} = 4$

Aufgabe 7.40

- Gleichung der Ebene durch BCD:

  $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

  $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}$

  $d = -\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -6 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\colon 2x + 2y + z - 6 = 0$

  Höhe der Pyramide = Abstand des Punktes A von ε:

  $h = d(A, \varepsilon) \overset{\text{HNF}}{=} \dfrac{|2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 - 6|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \dfrac{6}{3} = 2$

- Seitenkante $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $\sphericalangle\big(\overrightarrow{AC}, \vec{n}\big) = \arccos \dfrac{|\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\vec{n}|} = \dfrac{6}{\sqrt{5} \cdot 3} = \arccos \dfrac{2}{\sqrt{5}} = 26.57°$

  $\sphericalangle\big(\overrightarrow{AC}, BCD\big) = 90° - 26.57° = 63.43°$

Aufgabe 7.41

Wird eine Ebene $\varepsilon\colon ax+by+cz+d=0$ um h Einheiten parallel entlang ihres Normalenvektors verschoben, so bedeutet dies für die HNF der verschobenen Ebene δ und einen beliebigen Punkt P:

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(P,\delta) &= \operatorname{dist}(P,\varepsilon) \pm h \\ &= \frac{ax+by+cz+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \pm h \\ &= \frac{ax+by+cz+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \pm \frac{h\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ &= \frac{ax+by+cz+d \pm h\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\end{aligned}$$

Also muss $\pm h\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ zur Ebenengleichung von ε addiert werden, um die Ebenengleichung von δ zu erhalten.

(a) $\varepsilon\colon 11x-2y+10z-15=0$, $d=3$

$3\sqrt{11^2+2^2+10^2} = 3\cdot\sqrt{225} = 3\cdot 15 = 45$

$\delta_1\colon 11x-2y+10z+30=0$
$\delta_2\colon 11x-2y+10z-6=0$

(b) $\varepsilon\colon 24x-7z+5=0$, $d=4$

$4\sqrt{24^2+0^2+7^2} = 4\cdot\sqrt{625} = 4\cdot 25 = 100$

$\delta_1\colon 24x-7z+105=0$
$\delta_2\colon 24x-7z-95=0$

(c) $\varepsilon\colon 9x+12y+8z-6=0$, $d=2$

$2\sqrt{9^2+12^2+8^2} = 2\cdot\sqrt{289} = 2\cdot 17 = 34$

$\delta_1\colon 9x+12y+8z+28=0$
$\delta_2\colon 9x+12y+8z-40=0$

Aufgabe 7.42

(a)
$$\frac{|4x-2y-4z+3|}{\sqrt{16+4+16}} = \frac{|x+2y-2z+5|}{\sqrt{1+4+4}}$$
$$\frac{|4x-2y-4z+3|}{6} = \frac{|x+2y-2z+5|}{3} \qquad || \cdot 6$$
$$|4x-2y-4z+3| = |2x+4y-4z+10|$$

$$4x-2y-4z+3 = 2x+4y-4z+10$$
$$\omega_1\colon 2x-6y-7=0$$

$$4x-2y-4z+3 = -(2x+4y-4z+10)$$
$$\omega_2\colon 6x+2y-8z+13=0$$

(b)
$$\frac{|6x+6y+17z-2|}{\sqrt{36+36+289}} = \frac{|15x-10y-6z+9|}{\sqrt{225+100+36}}$$
$$\frac{|6x+6y+17z-2|}{19} = \frac{|15x-10y-6z+9|}{19} \qquad || \cdot 19$$
$$|6x+6y+17z-2| = |15x-10y-6z+9|$$

$$6x+6y+17z-2 = 15x-10y-6z+9$$
$$\omega_1\colon 9x-16y-23z+11=0$$

$$6x+6y+17z-2 = -(15x-10y-6z+9)$$
$$\omega_2\colon 21x-4y+11z+7=0$$

(c) $\omega_1\colon 10x-23y+11z-35=0$
$\omega_2\colon 10x+y-7z+13=0$

(d) $\omega_1\colon x+110y+11z+20=0$
$\omega_2\colon 55x+2y-25z-160=0$

Aufgabe 7.43

(a)
$$\frac{|3x-4y+2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|4x+3z+7|}{\sqrt{16+9}}$$
$$\frac{|3x-4y+2|}{5} = \frac{|4x+3z+7|}{5} \qquad || \cdot 5$$
$$|3x-4y+2| = |4x+3z+7|$$
$$3x-4y+2 = 4x+3z+7$$
$$\omega_1\colon x+4y+3z+5=0$$
$$3x-4y+2 = -(4x+3z+7)$$
$$\omega_2\colon 7x-4y+3z+9=0$$

$g \cap \omega_1 = \{P_1\}$:

$$\begin{aligned} 1(0+t)+4(1-t)+3(2+0)+5 &= 0 \\ t+4-4t+6+5 &= 0 \\ -3t+15 &= 0 \\ t &= 5 \\ P_1 &= (5,-4,2) \end{aligned}$$

$g \cap \omega_2 = \{P_2\}$:

$$\begin{aligned} 7(0+t)-4(1-t)+3(2+0)+9 &= 0 \\ 7t-4+4t+6+9 &= 0 \\ 11t+11 &= 0 \\ t &= -1 \\ P_2 &= (-1,2,2) \end{aligned}$$

(b)
$$\frac{|14x-7y-22z+38|}{\sqrt{196+49+484}} = \frac{|4x+7y-4z+2|}{\sqrt{16+49+16}}$$
$$\frac{|14x-7y-22z+38|}{27} = \frac{|4x+7y-4z+2|}{9} \qquad || \cdot 27$$
$$|14x-7y-22z+38| = |12x+21y-12z+6|$$
$$14x-7y-22z+38 = 12x+21y-12z+6$$
$$\omega_1\colon 2x-28y-10z+32=0$$

$$14x-7y-22z+38 = -(12x+21y-12z+6)$$
$$\omega_2\colon 26x+14y-34z+44=0$$

$g \cap \omega_1 = \{P_1\}$:

$$
\begin{aligned}
2(6+3t)-28(3+2t)-10(2-2t)+32 &= 0 \\
-30t-60 &= 0 \\
t &= -2 \\
P_1 &= (0,-1,6)
\end{aligned}
$$

$g \cap \omega_2 = \{P_2\}$:

$$
\begin{aligned}
26(6+3t)+14(3+2t)-34(2-2t)+44 &= 0 \\
174t+174 &= 0 \\
t &= -1 \\
P_2 &= (3,1,4)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7.44

$\varepsilon\colon x-12y+12z+7=0$?

(a) $d = \dfrac{3-12\cdot 3+12\cdot 5+7}{\sqrt{1+144+144}} = \dfrac{34}{17} = 2$

(b) $\pi_1\colon z=0$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{dist}(Q,\varepsilon) &= \operatorname{dist}(Q,\pi_1) \\
\frac{x-12\cdot 1+12\cdot 1+7}{17} &= \pm\frac{1}{\sqrt{0^2+0^2+1}} \\
x+7 &= \pm 17 \\
x_1 &= 10 \\
x_2 &= 24
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8.1

(a) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 16$

(b) $(x-3)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 5$

Aufgabe 8.2

(a) $(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 5^2$

Kugel mit Mittelpunkt $M(0,0,0)$ und Radius $\varrho = 5$

(b)
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 8z &= -12 \\ (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + (z-4)^2 - 16 &= -12 \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 &= 9 = 3^2 \end{aligned}$$

Kugel mit Mittelpunkt $M(1,-2,4)$ und Radius $\varrho = 3$

(c) $x^2 + y^2 - z^2 + 6x - 2y + 4z = 25$

keine Kugel (wegen $-z^2$)

(d)
$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + x + y + z &= 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z &= \frac{1}{3} \\ \left(x^2 + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(y^2 + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(z^2 + \frac{1}{6}\right)^2 &= \frac{12}{36} + \frac{3}{36} \\ \left(x^2 + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(y^2 + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(z^2 + \frac{1}{6}\right)^2 &= \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

Kugel mit Mittelpunkt $M(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6})$ und Radius $\varrho = \sqrt{\frac{5}{12}}$

Aufgabe 8.3

In der Grundrissebene gilt $z = 0$.

$$\begin{aligned} (x-4)^2 + (y-2)^2 + (0-3)^2 &= 25 \\ (x-4)^2 + (y-2)^2 &= 16 \end{aligned}$$

Kreis in π_1 mit $M(4,2,0)$ und $\varrho = 4$

Aufgabe 8.4

$$\varrho^2 = \left|\overrightarrow{MB}\right|^2 = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}\right|^2 = 9 + 36 + 16 = 61$$

$$\begin{aligned} \left|(a-3,-1,4)^{\mathrm{T}}\right| = (a-3)^2 + 1 + 16 &= 61 \\ (a-3)^2 &= 44 \\ a &= 3 \pm \sqrt{44} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left|(-3,b-1,4)^{\mathrm{T}}\right| = 9 + (b-1)^2 + 16 &= 61 \\ (b-1)^2 &= 36 \\ b_1 &= 7, \quad b_2 = -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left|(-3,-1,c+4)^{\mathrm{T}}\right| = 9 + 1 + (c+4)^2 &= 61 \\ (c+4)^2 &= 51 \\ c &= -4 \pm \sqrt{51} \end{aligned}$$

Aufgabe 8.5

(a) $$\begin{aligned} ([-4+t]-1)^2 + ([4-t]-2)^2 + ([3-2t]+1)^2 &= 9 \\ (t-5)^2 + (-t+2)^2 + (-2t+4)^2 &= 9 \\ 6t^2 - 30t + 45 &= 9 \\ 6t^2 - 30t + 36 &= 0 \\ t^2 - 5t + 6 &= 0 \\ (t-2)(t-3) &= 0 \\ t_1 &= 2 \\ t_2 &= 3 \end{aligned}$$

$P_1(-2,2{-}1),\ P_2(-1,1,-3)$

Aufgabe 8.5

(b) $$\begin{aligned} (8)^2 + (-2t)^2 + (5+4t)^2 &= 49 \\ 20t^2 + 40t + 89 &= 49 \\ 20t^2 - 40t + 40 &= 0 \\ t^2 - 2t + 2 &= 0 \\ D &= -4 \quad \text{keine Lösung} \end{aligned}$$

Die Gerade meidet die Kugel.

Aufgabe 8.5

(c) $$\begin{aligned} ([4+t]-4)^2+([8+2t]-5)^2+([7+2t]-1)^2 &= 9 \\ (t)^2+(2t+3)^2+(2t+6)^2 &= 9 \\ 9t^2+36t+45 &= 9 \\ 6t^2+36t+36 &= 0 \\ t^2+4t+4 &= 0 \\ (t+2)^2 &= 0 \\ t &= -2 \end{aligned}$$

Berührpunkt: $P(2,4,3)$

Aufgabe 8.6

Bestimme drei Mittelnormalebenen und schneide sie:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$, $M_{AB}(6,3,-1)$; $\mu_{AB}\colon 2x-4y-4z=4$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $M_{AC}(3.5,6,1.5)$; $\mu_{AC}\colon -3x+2y+z=3$

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $M_{AD}(2.5,3,4.5)$; $\mu_{AD}\colon -5x-4y+7z=7$

$\mu_{AB} \cap \mu_{AC} \cap \mu_{AD} = \big\{S(-2,-1,-1)\big\}$

Aufgabe 8.7

$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MP} = 49+16+16 = 81 = \varrho^2$ (ok)

$\vec{n} = \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_P = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = -76$

$\tau\colon 7x+4y-4z-76=0$

Aufgabe 8.8

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \subset \tau \text{ und } g \cap K = \emptyset$$

Der Berührpunkt $B(x, y, z)$ muss folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} K\colon x^2 + y^2 + z^2 &= 3^2 \quad (1) \\ (x, y, z)^T (0, 0, 1)^T &= 0 \quad (2) \\ (x, y, z)^T (10, 0, 0)^T &= 3^2 \quad (3) \end{aligned}$$

Aus (2) folgt $z = 0$

Aus (3) folgt $10x = 9$ und $x = 9/10$

Einsetzen in (1):

$$\frac{81}{100} + y^2 = 9 \Rightarrow y^2 = \frac{900 - 81}{100} = \frac{9}{100} \cdot 91 \Rightarrow y \quad = \pm \frac{3}{10}\sqrt{91}$$

$$\vec{r}_B = \begin{pmatrix} 9/10 \\ 3/10 \cdot \sqrt{91} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{10} \begin{pmatrix} 3 \\ \pm\sqrt{91} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{10}\vec{n}$$

$d = -\vec{r}_B \cdot \vec{r}_A = -30$

$3x \pm \sqrt{91}\, y - 30 = 0$

Aufgabe 8.9

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix} \subset \tau \text{ und } g \cap K = \emptyset$$

Der Berührpunkt $B(x, y, z)$ muss folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} K\colon x^2 + y^2 + z^2 &= 3^2 \quad (1) \\ (x, y, z)^T (2, 3, -10)^T &= 0 \quad (2) \\ (x, y, z)^T (3, 4, -5)^T &= 3^2 \quad (3) \end{aligned}$$

$2x + 3y - 10z = 0 \quad (2)$

$3x + 4y - 5z = 9 \quad (3)$

(3) − (2): $x + y + 5z = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 9 - y - 5z \quad (4)$

x aus (2) und (3) eliminieren: $y = 20z - 18 \quad (5)$

(5) in (4) einsetzen: $x = 9 - (20z - 18) - 5z = 27 - 25z \quad (6)$

(5), (6) in (1) einsetzen:

$$\begin{aligned}(27-25z)^2+(20z-18)^2+z^2&=9\\ 1026z^2-2070z+1044&=0\\ z_1&=1\\ z_2&=58/57\end{aligned}$$

z_1, z_2 in (5) und (6) einsetzen:

$$y_1 = 20z_1 - 18 = 2$$
$$y_2 = 20z_2 - 18 = 134/57$$

$$x_1 = 27 - 25z_1 = 2$$
$$x_2 = 27 - 25z_2 = 89/57$$

$\vec{n}_1 = (2,2,1)^{\mathrm{T}}$, $\vec{n}_2 = (89,134,58)^{\mathrm{T}}$

$A(3,4,-5) \in \tau_{1,2}$:

$$d_1 = -\vec{n}_1 \cdot \vec{r}_A = -9$$
$$d_2 = -\vec{n}_2 \cdot \vec{r}_A = -513$$

$$\tau_1\colon 2x + 2y + z - 9 = 0$$
$$\tau_2\colon 89x + 134y + 58z - 513 = 0$$

Aufgabe 8.10

Richtungsvektoren von g = Normalenvektoren von τ

Schnittpunkte von K mit h: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2&=25\\ 9t^2+4t^2+t^2&=25\\ 14t^2&=25 \quad\Rightarrow\quad t=\pm 5/\sqrt{14}\end{aligned}$$

Berührpunkte: $\vec{r}_B = \pm\dfrac{5}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad d_{1,2} = -\vec{n}\cdot\vec{r}_B = \pm 5\sqrt{14}$

$$\tau_1\colon 3x + 2y + z + 5\sqrt{14} = 0$$
$$\tau_2\colon 3x + 2y + z - 5\sqrt{14} = 0$$

Aufgabe 8.11

Wo trifft der Lichtstrahl auf die Kugel?

$g \cap K$:

$$
\begin{aligned}
(6-3t)^2+(-3+5t)^2+(7-t)^2 &= 49\\
35t^2-36t-30t-14t+36+9+49 &= 49\\
35t^2-80t+45 &= 0\\
t_1 &= 1\\
t_2 &= 9/7
\end{aligned}
$$

$B(3,2,6)$ (der zweite Schnittpunkt ist weiter entfernt)

$d=-\vec{n}\cdot\vec{r}_B=-\vec{r}_B^{\,2}=-49$

$\tau\colon\ 3x+2y+6z-49=0$

$A(6,-3,7)$ an τ spiegeln:

$$
\begin{aligned}
:\ 3(6+3t)+2(-3+2t)+6(7+6t)-49 &= 0\\
\ldots &= \ldots\\
t &= -5/49
\end{aligned}
$$

$A'\left(\frac{264}{49},-\frac{167}{49},\frac{283}{49}\right)$

$$
\vec{r}_B-\vec{r}_{A'}=\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}264/49\\-167/49\\283/49\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-117/49\\265/49\\11/49\end{pmatrix}=\frac{1}{49}\vec{v}'
$$

$$
g'\colon\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-117\\265\\11\end{pmatrix}
$$

Aufgabe 8.12

Wo trifft der Lichtstrahl auf die Kugel?

$g\cap K$:

$$
\begin{aligned}
(6-3t)^2+(-3+5t)^2+(7-t)^2 &= 49\\
35t^2-36t-30t-14t+36+9+49 &= 49\\
35t^2-80t+45 &= 0\\
t_1 &= 1\\
t_2 &= 9/7
\end{aligned}
$$

$B(3,2,6)$ (der zweite Schnittpunkt ist weiter entfernt)

$d=-\vec{n}\cdot\vec{r}_B=-\vec{r}_B^{\,2}=-49$

$\tau\colon\ 3x+2y+6z-49=0$

$A(6,-3,7)$ an τ spiegeln:

$$
\begin{aligned}
:\ 3(6+3t)+2(-3+2t)+6(7+6t)-49 &= 0\\
\ldots &= \ldots\\
t &= -5/49
\end{aligned}
$$

$A'\left(\frac{264}{49},-\frac{167}{49},\frac{283}{49}\right)$

$$\vec{r}_B - \vec{r}_{A'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 264/49 \\ -167/49 \\ 283/49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -117/49 \\ 265/49 \\ 11/49 \end{pmatrix} = \frac{1}{49}\vec{v}'$$

$$g'\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -117 \\ 265 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.13

- $E\colon x + 2z - 22 = 0$
- $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 18 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $E \cap g = M(-2, 13, 12) \qquad (t_0 = -3)$
- $d_1 = 3\sqrt{(}5);\ r = 2$