
Vektorgeometrie

Übungen (6–8)

Aufgabe 6.1

Bestimme eine Gleichung der Geraden g , die durch $A(2, 1, 3)$ und $B(5, 2, 7)$ geht.

Aufgabe 6.2

Liegt der Punkt $P(14, 11, 7)$ auf der Geraden mit der Gleichung

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 21 \\ 12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} ?$$

Aufgabe 6.3

Gib eine Gleichung der Geraden h an, die parallel zur Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

verläuft und durch den Punkt $Q(8, 9, 4)$ geht.

Aufgabe 6.4

Bestimme eine Parametergleichung der Geraden, die durch den Punkt $A(5, 2, 3)$ geht und parallel zur y -Achse verläuft.

Aufgabe 6.5

Bestimme eine Parametergleichung der Geraden, die durch den Punkt $A(3, -4, 1)$ geht und die z -Achse bei $z = 7$ schneidet.

Aufgabe 6.6

Bestimme eine möglichst einfache Parametergleichung der Geraden, die durch die Punkte $A(5, 0, -3)$ und $B(-1, 4, 7)$ geht.

Aufgabe 6.7

Bestimme eine Parametergleichung der Geraden, die parallel zur x -Achse verläuft und durch den Mittelpunkt der Strecke mit den Endpunkten $A(-4, 1, 5)$ und $B(6, -9, 3)$ geht.

Aufgabe 6.8

Bestimme eine Gleichung der Geraden, die durch den Punkt $P(-2, 1, 0)$ und den Schwerpunkt des Dreiecks mit den Ecken $A(1, 1, -7)$, $B(6, 4, 2)$, $C(5, -2, 8)$ geht.

Aufgabe 6.9

Bestimme eine möglichst einfache Gleichung der Geraden, welche die Höhe h_c des Dreiecks mit den Ecken $A(1, 1, -3)$, $B(3, 4, 1)$ und $C(0, 2, 4)$ enthält.

Aufgabe 6.10

Welche der Punkte $P(-2, -1, 7)$, $Q(8, 9, 8)$ und $R(4, 5, -2)$ liegen auf der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} ?$$

Aufgabe 6.11

Welche spezielle Lage hat die Gerade $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ?$

Aufgabe 6.12

Welche spezielle Lage hat die Gerade $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} ?$

Aufgabe 6.13

Welche spezielle Lage hat die Gerade $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} ?$

Aufgabe 6.14

Gib eine Gleichung der Geraden g an, die durch den Punkt $P(7, 6, 3)$ geht und parallel zur Geraden $h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ verläuft.

Aufgabe 6.15

Bestimme alle Spurpunkte der Geraden $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6.16

Im welchen Verhältnis teilt der mittlere der drei Spurpunkte der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

die Verbindungsstrecke zwischen den äusseren beiden Spurpunkten?

Aufgabe 6.17

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.18

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.19

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.20

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.21

Zeige, dass sich die Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

schneiden und berechne den Schnittpunkt und den spitzen Schnittwinkel.

Aufgabe 6.22

Zeige, dass sich die Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ und } h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

scheiden und bestimme den Schnittpunkt und den spitzen Schnittwinkel.

Aufgabe 6.23

Die Strecke mit den Endpunkten $A(-4, 5, -2)$ und $B(5, -1, 4)$ ist in drei gleiche Teile zu zerlegen. Ermittle die Koordinaten der Teilungspunkte.

Aufgabe 6.24

Bestimme den Abstand des Punktes $P(0, 3, 7)$ von der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und den Fusspunkt F des Lots von P auf g .

Aufgabe 6.25

Bestimme den Abstand der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.26

Zeige, dass sich die beiden Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

schneiden und bestimme die Gleichungen ihrer Winkelhalbierenden.

Aufgabe 6.27

Bestimme eine Gleichung der Geraden h , die orthogonal zur Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

steht und durch den Punkt $P(5, 8, 1)$ geht.

Aufgabe 6.28

Bestimme die Gleichung der Normalprojektion der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

auf die xy -Ebene.

Aufgabe 6.29

Welche Punkte auf der Geraden $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ haben vom Punkt $Q(1, -2, 3)$ den Abstand $d = 3$?

Aufgabe 6.30

Ein Körper bewegt sich geradlinig gleichförmig durch den Raum. Zur Zeit $t = 0$ befindet er sich im Punkt $A(-6, -4, -9)$ und 10 Sekunden später im Punkt $B(24, 16, 1)$.

- (a) Gib eine Parametergleichung der Bahn an?
- (b) Wo befindet sich der Körper zur Zeit $t = 15$ s?
- (c) Wann hat der Körper vom Ursprung eine Entfernung von 7 m?

(Es gilt $|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1$ m.)

Aufgabe 7.1

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die die Punkte A , B und C enthält.

(a) $A(4, 0, 8)$, $B(4, -5, 9)$, $C(4, 0, 2)$

(b) $A(4, 9, 2)$, $B(-6, 4, 4)$, $C(-2, 6, 3)$

(c) $A(3, -8, 0)$, $B(8, 4, -8)$, $C(4, -1, 3)$

(d) $A(-5, 7, 4)$, $B(3, -2, 2)$, $C(3, 0, -2)$

Aufgabe 7.2

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die durch den Punkt P und die Gerade g gegeben ist.

(a) $P(3, -2, 0)$ $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $(3, -2, 0)$, $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.3

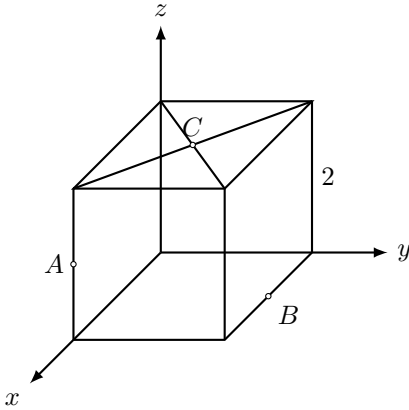
Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die durch die parallelen Geraden g und h definiert ist.

(a) $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.4

Im unten dargestellten Würfel sind A und B Kantenmittelpunkte. Wie heisst die Koordinatengleichung der Ebene ABC ?



Aufgabe 7.5

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene,

- (a) die parallel zur xy -Ebene ist und den Punkt $P(5, 3, -6)$ enthält.
- (a) die parallel zur xz -Ebene ist und den Punkt $P(7, 9, 1)$ enthält.

Aufgabe 7.6

Bestimme die Gleichung einer Ebene, die senkrecht zum Vektor \vec{v} steht und durch den Punkt P geht.

- (a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $P(2, 8, -5)$
- (b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$, $P(4, 0, 3)$

Aufgabe 7.7

Zeige, dass sich die beiden Geraden schneiden und bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die durch g und h aufgespannt wird.

- (a) $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$
- (b) $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$(c) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.8

Beschreibe die spezielle Lage der Ebene.

$$(a) \quad \varepsilon: z = 2y - 1 \qquad (c) \quad \varepsilon: 2x + 3z - 4 = 0 \qquad (e) \quad \varepsilon: z = -1$$

$$(b) \quad \varepsilon: y = -x + 4 \qquad (d) \quad \varepsilon: x = 3 \qquad (f) \quad \varepsilon: y = 0$$

Aufgabe 7.9

Berechne die Achsenabschnitte der Ebene.

$$(a) \quad \varepsilon: 2x - 3y + z - 6 = 0$$

$$(b) \quad \varepsilon: 3y - 4z + 12 = 0$$

$$(c) \quad \varepsilon: 4x + 5y - 2z + 10 = 0$$

$$(d) \quad \varepsilon: x - 4y + 3z = 0$$

Aufgabe 7.10

Berechne formal eine Ebenengleichung aus den Achsenabschnitten $x = a$, $y = b$ und $z = c$ und dividiere das Ergebnis durch abc .

Aufgabe 7.11

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die durch ihre Achsenabschnitte gegeben ist.

$$(a) \quad a = 2, b = 2, c = 3$$

$$(c) \quad a = 1, b = -4, c = 2$$

$$(b) \quad a = 3, c = -7$$

$$(d) \quad a = b = c = 0$$

Aufgabe 7.12

Stelle die Gleichung der Ebene in der Koordinatenform dar.

$$(a) \varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.13

Stelle die Gleichung der Ebene in der Parameterform dar.

$$(a) \varepsilon: 5x - 2y + z - 6 = 0$$

$$(b) \varepsilon: 4y - z + 7 = 0$$

$$(c) \varepsilon: 2x + 4y - 6z + 1 = 0$$

$$(d) \varepsilon: 3z - 5 = 0$$

Aufgabe 7.14

Bestimme die Parametergleichungen der Spuren der Ebene.

$$(a) \varepsilon: x - 3y + 2z - 6 = 0$$

$$(b) \varepsilon: 3y + 5z - 15 = 0$$

Aufgabe 7.15

Liegt der Punkt P in der Ebene ε ?

$$(a) \varepsilon: 3x - 2y - 5z + 11 = 0; P(5, -2, 6)$$

$$(b) \varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}; P(2, 4, 1)$$

Aufgabe 7.16

In der Ebene $\varepsilon: 3x - 2y + z - 4 = 0$ ist ein Punkt P zu bestimmen,

$$(a) \text{ der auf der } z\text{-Achse liegt,}$$

- (b) der drei gleiche Koordinaten hat,
- (c) der den Grundriss $P'(1, -5, 0)$ besitzt,
- (d) der den Seitenriss $P'''(2, 0, 4)$ besitzt,

Aufgabe 7.17

Ist das Viereck $ABCD$ mit $A(3, -1, 2)$ $B(4, 0, 1)$ $C(1, 5, 3)$ und $D(-2, 0, 6)$ eben oder nicht?

Aufgabe 7.18

Bestimme den Schnittpunkt der drei Ebenen.

- $\varepsilon_1: 3x - 2y + z - 8 = 0$
- $\varepsilon_2: x + y - 3z + 4 = 0$
- $\varepsilon_3: 4x + 3y - 5z - 8 = 0$

Aufgabe 7.19

Die Ebene $\varepsilon: 9x + 16y + pz - 144 = 0$ schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten A , B und C . Bestimme p , so dass die Pyramide $OABC$ mit dem Koordinatenursprung O als vierte Ecke, das Volumen $V = 384$ besitzt.

Aufgabe 7.20

Beschreibe die besondere Lage der Ebenen im \mathbb{R}^3 .

- | | |
|-------------------------------------|------------------------------|
| (a) $\varepsilon: 2y - z - 1 = 0$ | (c) $\varepsilon: y = 4 - x$ |
| (b) $\varepsilon: 5x - 2y + 7z = 0$ | (d) $\varepsilon: z = 3$ |

Aufgabe 7.21

Bestimme den Durchstosspunkt der Geraden g mit der Ebene ε .

(a) $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}; \varepsilon: 3x + 8y + 4z + 8 = 0$

$$(b) \ g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}; \varepsilon: -3x + 7y + 9z - 5 = 0$$

$$(c) \ g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -8 \end{pmatrix}; \varepsilon: 9x - 4y + 6z - 5 = 0$$

$$(d) \ g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \varepsilon: x + 4y - 2z - 2 = 0$$

Aufgabe 7.22

Bestimme den Durchstosspunkt der Geraden g mit der Ebene E .

$$(a) \ g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(b) \ g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}; \varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$(c) \ g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}; \varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.23

Bestimme eine Parametergleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen.

$$(a) \ \varepsilon_1: 4x + 2y + 5z + 5 = 0; \varepsilon_2: 6x + 4y + 9z - 7 = 0$$

$$(b) \ \varepsilon_1: x + y + 3 = 0; \varepsilon_2: 5x + 8y + 3z - 3 = 0$$

Aufgabe 7.24

Bestimme eine Gleichung der Ebene δ , die parallel zur Ebene ε ist und durch den Punkt P geht.

(a) $\varepsilon: 2x - 3y + 5z + 4 = 0; P(1, 1, 1)$

(b) $\varepsilon: 7x + 2y - 8z + 9 = 0; P(3, -2, 4)$

Aufgabe 7.25

Bestimme eine Gleichung der Ebene δ , die senkrecht zur Gerade g ist und durch den Punkt P geht.

$$(a) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}; P(5, 1, 9)$$

$$(b) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; P(4, 0, -5)$$

Aufgabe 7.26

Bestimme eine Gleichung der Mittelnormalebene der Strecke AB .

$$(a) \quad A(2, 4, 1), B(6, -8, 7)$$

$$(b) \quad A(5, -5, 4), B(5, 9, 2)$$

Aufgabe 7.27

Welcher Punkt auf der Geraden g hat von den Punkten A und B den gleichen Abstand?

$$(a) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; A(-1, 2, 1), B(3, 4, -7)$$

$$(b) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; A(-3, 6, 5), B(5, 2, -3)$$

Aufgabe 7.28

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die durch die Punkte P und Q geht und normal zur Ebene ε steht.

$$(a) \quad P(1, 3, 0), Q(3, 2, 1); \varepsilon: 4x + 3y - 2 = 0$$

$$(b) \quad P(2, 0, 1), Q(-3, -4, 2); \varepsilon: 3x + y + 7z - 2 = 0$$

Aufgabe 7.29

Der Punkt P wird an der Ebene ε gespiegelt. Gesucht sind die Koordinaten des gespiegelten Punktes P' .

(a) $P(0, 4, -5)$, $\varepsilon: 4x - 3y + z + 4 = 0$

(b) $P(4, 0, -2)$, $\varepsilon: x - 2y + 3z - 5 = 0$

(c) $P(-1, -6, 17)$, $\varepsilon: 3x - 8z - 7 = 0$

Aufgabe 7.30

Der Punkt $P'(0, 0, 7)$ ist der Spiegelpunkt von $P(4, 3, -2)$. Wie heisst die Koordinatengleichung der Ebene ε , an der P gespiegelt wurde?

Aufgabe 7.31

Die Gerade g wird an der Ebene ε gespiegelt. Bestimme eine Parametergleichung der Spiegelgeraden g' .

(a) $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \varepsilon: 4x + 2y - z + 1 = 0$

(b) $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \varepsilon: x - 3y - 2z + 42 = 0$

Aufgabe 7.32

Ein Lichtstrahl geht durch $P(7, -7, 4)$ und wird an der Ebene $\varepsilon: 5x - 2y + 3z - 23 = 0$ reflektiert. Der Punkt $Q(7, -1, 8)$ liegt auf dem reflektierten Lichtstrahl. In welchem Punkt der Ebene ε erfolgt die Reflexion?

Aufgabe 7.33

Ein Lichtstrahl geht von der Lichtquelle $P(14, 7, -11)$ aus, wird in $R(5, 1, 4)$ an der Ebene ε reflektiert und läuft anschliessend durch den Punkt $Q(3, 13, 2)$. Wie heisst die Koordinatengleichung der Ebene ε ?

Aufgabe 7.34

Bestimme den spitzen Schnittwinkel der Ebenen ε und δ

(a) $\varepsilon: 5x - y - 6z + 1 = 0$; $\delta: 4x + z - 3 = 0$

(b) $\varepsilon: 3x - 2y + 5z - 2 = 0$; δ gegeben durch $P(3, -1, 4)$ und $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(c) $\varepsilon: 2x + 4y - 3z + 7 = 0$; δ gegeben durch die parallelen Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.35

Bestimme den spitzen Schnittwinkel von Gerade g und Ebene ε .

(a) $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\varepsilon: 3x - 4y + 6 = 0$

(b) $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\varepsilon: 2x - 5y + z + 3 = 0$

Aufgabe 7.36

Für welchen Wert c schliesst die Ebene $\varepsilon: 4x + cz - 1 = 0$ mit der xy -Ebene einen Winkel von 45° ein?

Aufgabe 7.37

Ein gerader Kreiskegel besitzt die Spitze $S(-7, -3, 14)$. Der Punkt $M(3, -1, 3)$ ist der Mittelpunkt des Grundkreises. $P(1, -1, 8)$ liegt auf einer Mantellinie des Kegels. Berechne das Volumen des Kegels.

Aufgabe 7.38

Vom Quadrat $ABCD$ sind $A(3, 2, 1)$, $B(-3, -1, -5)$ und $C(3, y, z)$ gegeben. Dieses Quadrat ist Grundfläche einer geraden Pyramide mit dem Volumen $V = 324$.

- (a) Bestimme die *ganzzahligen* Werte y und z .
- (b) Welche Koordinaten hat die Spitze S der Pyramide? (zwei Lösungen)

Aufgabe 7.39

Berechne den Abstand des Punktes P von der Ebene E .

- (a) $P(3, 5, 1)$, $\varepsilon: 4x + 7y - 4z + 2 = 0$
- (b) $P(7, -2, -5)$, $\varepsilon: 6x - 9y - 2z + 7 = 0$
- (c) $P(-4, 0, 29)$, $\varepsilon: 15x + 8y - 8 = 0$

Aufgabe 7.40

$A(0, 0, 0)$, $B(2, 1, 0)$, $C(1, 2, 0)$ und $D(1, 1, 2)$ sind Eckpunkte einer Pyramide $ABCD$.

Berechne die Höhe der Pyramide über der Grundfläche BCD und den Winkel, den die Seitenkante AC mit der Grundfläche BCD einschliesst.

Aufgabe 7.41

Bestimme die Koordinatengleichungen der Parallelebenen zur Ebene ε im Abstand d .

- (a) $\varepsilon: 11x - 2y + 10z - 15 = 0$, $d = 3$
- (b) $\varepsilon: 24x - 7z + 5 = 0$, $d = 4$
- (c) $\varepsilon: 9x + 12y + 8z - 6 = 0$, $d = 2$

Aufgabe 7.42

Bestimme die Koordinatengleichungen der winkelhalbierenden Ebenen der gegebenen Ebenen ε und δ .

(a) $\varepsilon: 4x - 2y - 4z + 3 = 0$, $\delta: x + 2y - 2z + 5 = 0$

(b) $\varepsilon: 6x + 6y + 17z - 2 = 0$, $\delta: 15x - 10y - 6z + 9 = 0$

(c) $\varepsilon: 10x - 11y + 2z - 11 = 0$, $\delta: 4y - 3z - 8 = 0$

(d) $\varepsilon: 3x - 6y - 2z - 10 = 0$, $\delta: 4x + 8y - z - 10 = 0$

Aufgabe 7.43

Welche Punkte auf der Geraden g haben von den Ebenen ε und δ gleiche Abstände?

(a) $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$

$$\varepsilon: 3x - 4y + 2 = 0, \delta: 4x + 3z + 7 = 0$$

(b) $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix};$

$$\varepsilon: 14x - 7y - 22z + 38 = 0, \delta: 4x + 7y - 4z + 2 = 0$$

Aufgabe 7.44

(a) Welchen Abstand hat der Punkt $P(3, 3, 5)$ von der Ebene $\varepsilon: x - 12y + 12z + 7 = 0$?

(b) Ein Punkt $Q(x, 1, 1)$ hat gleichen Abstand von ε und von der xy -Ebene. Bestimme seine x -Koordinate.

Aufgabe 8.1

Stelle die Gleichung der Kugel $K(M, \varrho)$ auf.

(a) $M(1, 1, 1), \varrho = 4$

(b) $M(3, 0, -2), \varrho = \sqrt{5}$

Aufgabe 8.2

Untersuche, ob es sich um die Gleichung einer Kugel handelt und bestimme in diesem Fall ihren Mittelpunkt M und ihren Radius ϱ .

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

(b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 8z = -12$

(c) $x^2 + y^2 - z^2 + 6x - 2y + 4z = 25$

(d) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + x + y + z = 1$

Aufgabe 8.3

Schneide die Kugel $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$ mit der Grundrissebene.

Aufgabe 8.4

Eine Kugel mit Zentrum $M(3, 1, -4)$ schneidet die y -Achse im Punkt $B(0, 7, 0)$. Bestimme die anderen beiden Achsenabschnittspunkte der Kugel.

Aufgabe 8.5

Untersuche die gegenseitige Lage von Kugel K und Gerade g und bestimme allfällige Schnitt- oder Berührungspunkte.

$$(a) \quad K: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9; \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad K: x^2 + y^2 + z^2 = 49; \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad K: (x-4)^2 + (y-5)^2 + (z-1)^2 = 9; \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.6

Bestimme die Gleichung der Umkugel des Tetraeders mit den Ecken $A(5, 5, 1)$, $B(7, 1, -3)$, $C(2, 7, 2)$ und $D(0, 1, 8)$.

Aufgabe 8.7

Zeige, dass der Punkt $P(8, 7, 2)$ auf der Kugel mit dem Mittelpunkt $M(1, 3, 6)$ und dem Radius $\varrho = 9$ liegt und bestimme die Gleichung der Tangentialebene in P .

Aufgabe 8.8

Vom Punkt $A(10, 0, 0)$ aus soll eine Tangentialebene an die Kugel $K: x^2 + y^2 + z^2 = 9$ gelegt werden, die zur Grundrissebene π_1 senkrecht steht.

Aufgabe 8.9

Bestimme die Tangentialebenen an die Kugel mit $M(0, 0, 0)$ und $\varrho = 3$, welche die Gerade mit der Gleichung

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$$

enthalten.

Aufgabe 8.10

Bestimme die Tangentialebenen an die Kugel mit $M(0, 0, 0)$ und $\varrho = 5$, die senkrecht zur Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

stehen.

Aufgabe 8.11

Gegeben sei die Kugel K mit $M(0, 0, 0)$ und $\varrho = 7$ sowie die Gerade

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Fasst man den Punkt $A(6, -3, 7)$ der Geraden als Lichtquelle auf und betrachtet die Kugelfläche K als Spiegel, so wird der Lichtstrahl g an der Kugel reflektiert. Bestimme eine Parametergleichung des reflektierten Lichtstrahls.

Aufgabe 8.12

Gegeben sei die Kugel K mit $M(0, 0, 0)$ und $\varrho = 7$ sowie die Gerade

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Fasst man den Punkt $A(6, -3, 7)$ der Geraden als Lichtquelle auf und betrachtet die Kugelfläche K als Spiegel, so wird der Lichtstrahl g an der Kugel reflektiert. Bestimme eine Parametergleichung des reflektierten Lichtstrahls.

Aufgabe 8.13

Zeige, dass sich die Kugeln K_1 mit $M_1(1, 13, 18)$, $\varrho_1 = 7$ und K_2 mit $M_2(-1, 13, 14)$, $\varrho_2 = 3$ schneiden und bestimme den Radius r des Schnittkreises.