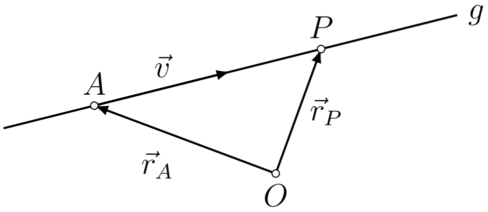
Vektorgeometrie

Theorie (6–8)

6 Die Gerade

6.1 Die Parametergleichung der Gerade



Die Gerade g ist festgelegt durch den Punkt A und einen Richtungsvektor $\vec{v}$. Für einen beliebigen Punkt P gilt:

$$\begin{aligned} P \in g \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AP} = t \cdot \vec{v} \\ &\Leftrightarrow \quad -\vec{r}_A + \vec{r}_P = t \cdot \vec{v} \\ &\Leftrightarrow \quad \vec{r}_P = \vec{r}_A + t \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

Die Zahl t wird Parameter genannt.

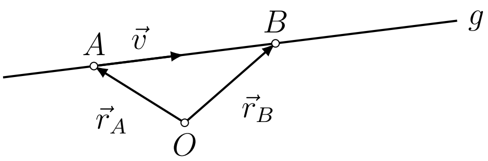
$P(x, y, z) \in g \Leftrightarrow$ Es gibt einen Wert für t, der die Parametergleichung erfüllt:

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$$

6.2 Erste Anwendungen der Geradengleichung

Beispiel 6.2.1

Bestimme eine Gleichung der Geraden g durch die Punkte $A(-4, 1, 5)$ und $B(2, -1, 1)$.



$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel 6.2.2

Gegeben: $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Welche Punkte gehören zu den Parameterwerten?

- $t = 0$: $P(5, 9, -4)$
- $t = 3$: $Q(14, 3, -1)$
- $t = -1$: $R(2, 11, -5)$

Beispiel 6.2.3

Gegeben: $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Welche der folgenden Punkte liegen auf g?

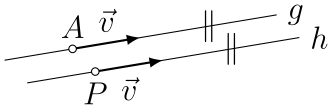
- $S(-1, 0, 3)$: $\begin{array}{rcl} -1 &=& -4 + 3t \\ 0 &=& 1 - t \\ 3 &=& 5 - 2t \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad S \in g$

- $T(-10, 3, 1)$: $\begin{array}{rcl} -10 &=& -4 + 3t \\ 3 &=& 1 - t \\ 1 &=& 5 - 2t \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} t = -2 \\ t = -2 \\ t = 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad T \notin g$

Bestimme eine Gleichung der Geraden h, die parallel zu

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

verläuft und durch den Punkt $P(-7, 8, 11)$ geht.

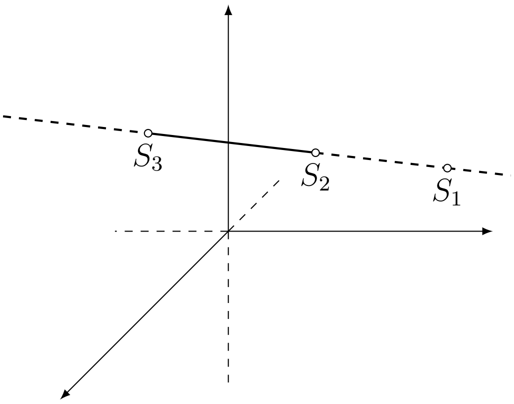


Der Richtungsvektor von g ist auch ein Richtungsvekor von h:

$h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

6.3 Spurpunkte

Die Spurpunkte S_1, S_2, S_3 einer Geraden g sind die Schnittpunkte von g mit den Koordinatenebenen π_1 (xy-Ebene), π_2 (yz-Ebene) und π_3 (zx-Ebene).



Beispiel 6.3.1

Bestimme den ersten Spurpunkt der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$g \cap \pi_1 = S_1(x, y, 0)$:

$$\begin{aligned} x &= 4 - 2t \\ y &= -3 + 3t \quad \Rightarrow \quad t = -2 \quad \Rightarrow \quad S_1(8, -9, 0) \\ 0 &= 6 + 3t \end{aligned}$$

Beispiel 6.3.2

Bestimme den zweiten Spurpunkt der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$g \cap \pi_2 = S_2(0, y, z)$:

$$\begin{aligned} 0 &= 4 + 0t \\ y &= 3 + 5t \quad \Rightarrow \quad \text{keine Lösung} \quad \Rightarrow \quad \text{kein Spurpunkt} \\ z &= -8 + 2t \end{aligned}$$

Beispiel 6.3.3

Bestimme den dritten Spurpunkt der Geraden

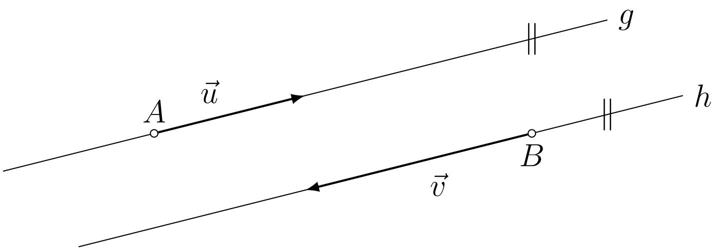
$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$g \cap \pi_3 = S_3(x, 0, z)$:

$x = 4 + 2t$
$0 = 0 + 0t \quad \Rightarrow \quad$ jedes $t \in \mathbb{R}$ ist Lösung $\quad \Rightarrow \quad g \subset \pi_3$
$z = 3 + 5t$

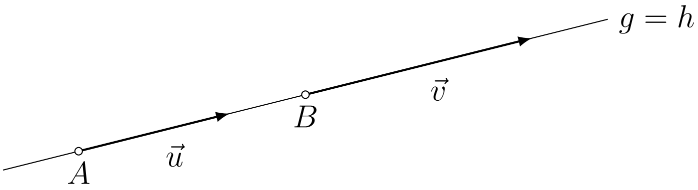
6.4 Gegenseitige Lage von Geraden

Parallele Geraden



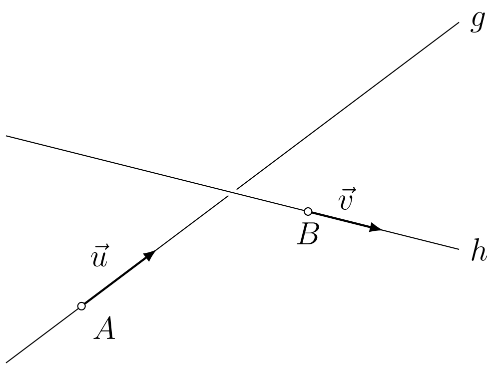
- kollineare Richtungsvektoren
- kein gemeinsamer Punkt

Zusammenfallende Geraden



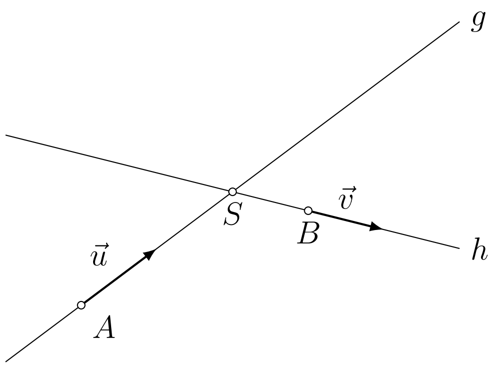
- kollineare Richtungsvektoren
- ein gemeinsamer Punkt (und damit unendlich viele)

Windschiefe Geraden



- keine kollinearen Richtungsvektoren
- kein gemeinsamer Punkt

Schneidende Geraden



- keine kollinearen Richtungsvektoren
- ein gemeinsamer Punkt

Zusammenfassung

	RV kollinear	RV nicht kollinear
ein gemeinsamer Punkt	identisch	schneidend
kein gemeinsamer Punkt	parallel	windschief

Beispiel 6.4.1

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden.

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren: kollinear, denn $\vec{v}_h = -1.5 \cdot \vec{v}_g$

$A(3,2,1) \in h$? [oder: $B(1,0,5) \in g$?]

$$\begin{array}{lcl} 3 = 1 + 6t & & t = 1/3 \\ 2 = 0 - 12t & \Rightarrow & t = -1/6 \quad \Rightarrow \quad A \notin h \quad \Rightarrow \quad g \parallel h \\ 1 = 5 - 3t & & t = 4/3 \end{array}$$

Beispiel 6.4.2

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden.

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren: nicht kollinear

$g \cap h$?

$$\begin{array}{rcrcl} 9 - 2s = 7 + 2t & & -2s - 2t = -2 & & \\ -2 + s = 2 - 2t & \Rightarrow & s + 2t = 4 & \Rightarrow & \begin{array}{l} s = -2 \\ t = 3 \end{array} \\ 3 - 9s = 6 + 5t & & -9s - 5t = 3 & & \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad g \cap h = S(13, -4, 21)$$

Beispiel 6.4.3

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden.

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 15 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren: kollinear, denn $\vec{v}_g = (-2) \cdot \vec{v}_h$

$A(2,3,8) \in h$?

$$\begin{array}{lcrcl} 2 = -6 - 2t & & 8 = -2t & & t = -4 \\ 3 = 15 + 3t & \Rightarrow & -12 = 3t & \Rightarrow & t = -4 \quad \Rightarrow \quad g = h \\ 8 = -4 - 3t & & 12 = -3t & & t = -4 \end{array}$$

Beispiel 6.4.4

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden.

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 20 \\ 24 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren: nicht kollinear

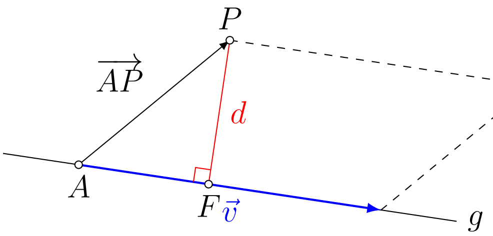
$g \cap h$?

$$\begin{aligned} -1 + 7s &= 11 - t \\ 4 - 2s &= 20 + 8t \\ 8 + 6s &= 24 + 4t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 7s + t &= 12 \\ -2s - 8t &= 16 \\ 6s - 4t &= 16 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{keine Lösung}$$

$\Rightarrow \quad g$ und h sind *windschief*

6.5 Abstandsberechnungen mit Geraden

Abstand Punkt–Gerade



Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms auf zwei Arten:

$$d \cdot |\vec{v}| = |\vec{v} \times \overrightarrow{AP}| \quad \Rightarrow \quad d = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}|}$$

Beispiel 6.5.1

Bestimme den Abstand d des Punktes $P(8, 9, 8)$ von der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie den Fusspunkt F des Lots von P auf g.

$$d = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{9}{3} = 3$$

Fusspunkt F: $\vec{r}_F = \vec{r}_A + k \cdot \vec{v}$

$$\overrightarrow{FP} \cdot \vec{v} = 0$$

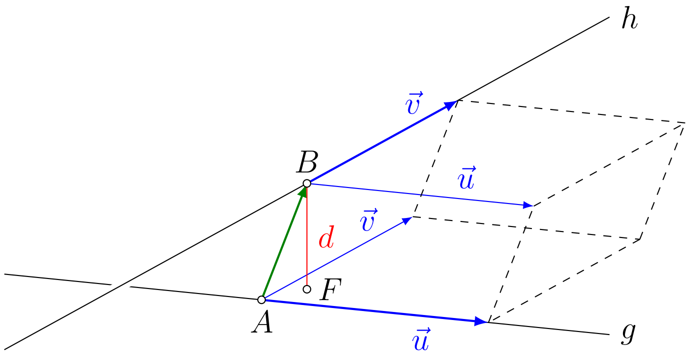
$$\left(-k \cdot \vec{v} + \overrightarrow{AP}\right) \cdot \vec{v} = 0$$

$$-k \cdot \vec{v} \cdot \vec{v} + \overrightarrow{AP} \cdot \vec{v} = 0$$

$$k = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \frac{27}{9} = 3$$

$$\vec{r}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad F(7, 11, 6)$$

Abstand windschiefer Geraden



$$\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| \cdot d = \left|\,(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \overrightarrow{AB}\,\right| \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\left|\,(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \overrightarrow{AB}\,\right|}{\left|\vec{u} \times \vec{v}\,\right|}$$

$\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overrightarrow{AB}$ spannen einen Spat auf.

Die Geraden g und h liegen in parallelen Ebenen, welche gleichzeitig auch die Grund- und die Deckfläche des Spates enthalten.

Der Abstand d der Geraden ist gleich dem Abstand dieser Ebenen und somit gleich der Höhe des Spates.

Beispiel 6.5.1

Bestimme den Abstand der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -21 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -12 \\ 30 \end{pmatrix}$$

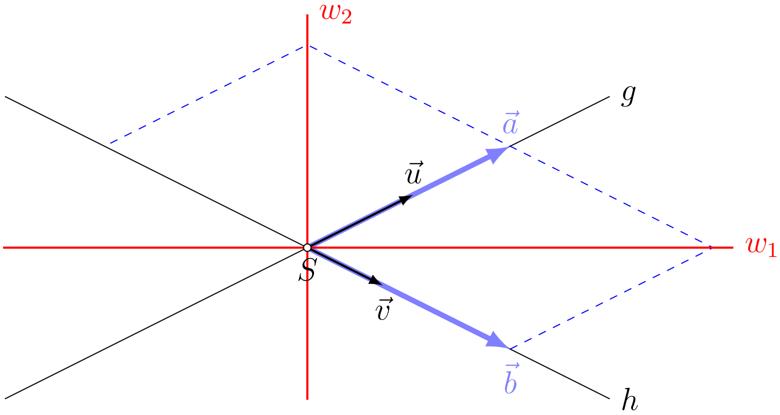
$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ -24 \end{pmatrix}$$

$$d(g,h) = \frac{\left|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \overrightarrow{AB}\right|}{\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -20 \\ -12 \\ 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ -24 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -20 \\ -12 \\ 30 \end{pmatrix}\right|} = \frac{684}{38} = 18$$

6.6 Die Winkelhalbierenden zweier Geraden

Gegeben: zwei sich schneidende Geraden g und h

Gesucht: Gleichungen der Winkelhalbierenden



Idee: Sind Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ von g und h gleich lang, so spannen sie zwei (kongruente) Rhomben auf.

Die Diagonalen dieser Rhomben sind die gesuchten Winkelhalbierenden:

$w_1\colon \vec{r} = \vec{r}_S + t_1(\vec{a} + \vec{b})$

$w_2\colon \vec{r} = \vec{r}_S + t_2(\vec{a} - \vec{b})$

Beispiel 6.6.1

Gesucht: Gleichungen der Winkelhalbierenden der Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt: $S(1,2,3)$ [offensichtlich]

$|\vec{u}| = 3$

$|\vec{v}| = 5$

$$\vec{a} = 5\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = 3\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$w_1\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 19 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$w_2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -22 \end{pmatrix}$$

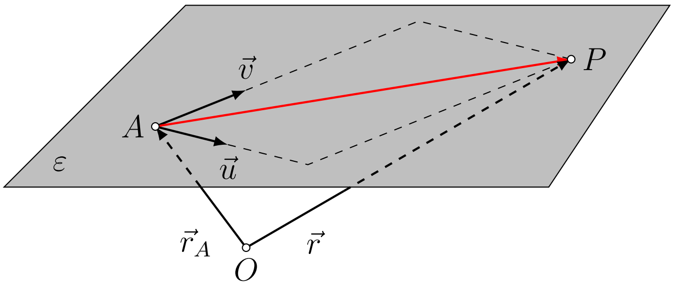
7 Die Ebene

7.1 Die verschiedenen Formen der Ebenengleichung

Die Parameterform

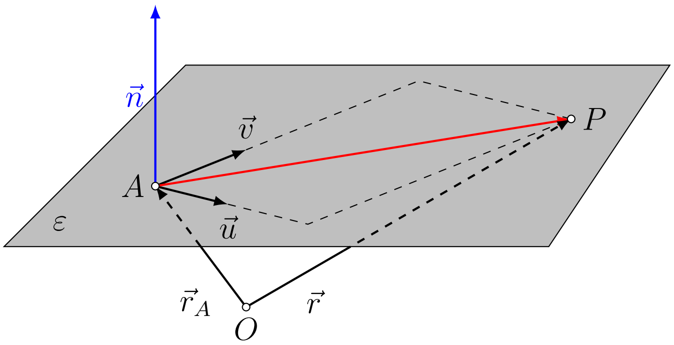
Gegeben: Ein Punkt A sowie zwei Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$

$\vec{r}$ ist der zum Punkt $P(x, y, z)$ gehörende Ortsvektor.



$\varepsilon\colon \vec{r} = \vec{r}_A + s\vec{u} + t\vec{v}$ Parameterform

Die Normalenform



$\vec{n} \neq \vec{0}$ ist ein Normalenvektor von ε $\big(\text{z. B. } \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}\big)$

$P \in \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n} \perp \overrightarrow{AP} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_A) = 0$

Die Koordinatenform

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_A) = 0 \quad \text{Normalenform}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{r} - \vec{n} \cdot \vec{r}_A = 0$$

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z \underbrace{- n_1 a_1 - n_2 a_2 - n_3 a_3}_{D} = 0$$

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z + D = 0 \quad \text{Koordinatenform}$$

Beispiel (a)

Gegeben: Punkte $A(2,-3,0)$, $B(5,3,1)$, $C(4,5,2)$

Gesucht: Parameterform der Ebene durch A, B und C

Parameterform: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}3\\6\\1\end{pmatrix} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}2\\8\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} = 2\vec{v}$

$$\varepsilon\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\6\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$$

Beispiel (b)

Gegeben: Punkte $A(2,-3,0)$, $B(5,3,1)$, $C(4,5,2)$

Gesucht: Normalenform der Ebene durch A, B und C

Normalenvektor: $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\6\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\6\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$

$$\varepsilon\colon \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}\right] = 0$$

Beispiel (c)

Gegeben: Punkte $A(2,-3,0)$, $B(5,3,1)$, $C(4,5,2)$

Gesucht: Koordinatenform der Ebene durch A, B und C

$$D = -\vec{n}\cdot\vec{r}_A = -\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix} = -5$$

Merke: Die Komponenten eines Normalenvektors einer Ebene sind gleichzeitig Koeffizienten der Koordinatengleichung dieser Ebene.

$\varepsilon\colon x - y + 3z - 5 = 0$

Beispiel (d)

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene ε, die durch $g\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\8\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und $P(4,4,1)$ definiert ist.

$\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix}10\\-4\\0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \begin{pmatrix}5\\-2\\0\end{pmatrix}$

$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}5\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-15\\12\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix}2\\5\\-4\end{pmatrix}$

$D = -\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -24$

$\varepsilon\colon 2x + 5y - 4z - 24 = 0$

Beispiel (e)

Wann ist ein Ebene durch 2 Geraden definiert?

Wenn die beiden Geraden parallel sind oder sich schneiden.

Beispiel (f)

Wie lauten die Koordinatengleichungen der Koordinatenebenen π_1, π_2 und π_3?

$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von π_1 (xy-Ebene).

Somit lautet die Koordinatengleichung $0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z + D = 0$

Da $(0,0,0)$ in π_1 liegt, folgt daraus $D = 0$ und $\pi_1\colon z = 0$

Analog folgen $\pi_2\colon x = 0$ und $\pi_3\colon y = 0$

7.2 Erste Anwendungen der Ebenengleichung

Liegt der Punkt $P(10, 2, 4.5)$ in der Ebene

$\varepsilon\colon \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\9\\12\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-4\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}5\\1\\-5\end{pmatrix}$?

$$\begin{aligned} 10 &= -10 + 2s + 5t \\ 2 &= 9 - 4s + t \\ 4.5 &= 12 + 3s - 5t \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2s + 5t &= 20 \\ -4s + t &= -7 \\ 3s - 5t &= -7.5 \end{aligned}$$

Lösung: $s = 2.5,\ t = 3 \quad \Rightarrow \quad P \in \varepsilon$

Liegt der Punkt $P(5,-2,16)$ in der Ebene $\varepsilon\colon 4x+3y-z+1=0$?

$4\cdot 5+3\cdot(-2)-16+1=0 \quad\Rightarrow\quad -1=0 \quad\Rightarrow\quad P\notin\varepsilon$

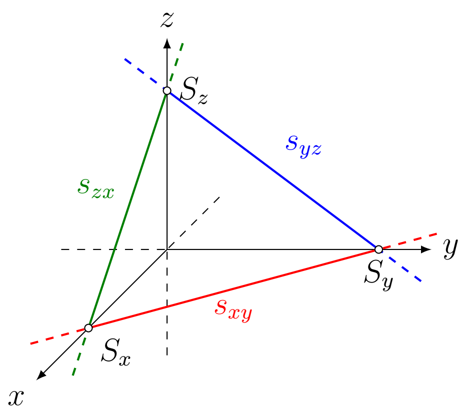
Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene δ, die durch den Punkt $P(1,2,-3)$ geht und parallel zur Ebene $\varepsilon\colon\ -8x+2y-3z+1=0$ liegt.

$$\vec{n}_\delta=\vec{n}_\varepsilon=\begin{pmatrix}-8\\2\\-3\end{pmatrix}$$

$D=-\vec{n}_\delta\cdot\vec{r}_P=-5$

$\delta\colon\ -8x+2y-3z-5=0$

7.3 Achsenabschnitte und Spurgeraden



Achsenabschnitte: S_x, S_y, S_z

Spurgeraden: s_{xy}, s_{yz}, s_{zx}

Beispiel

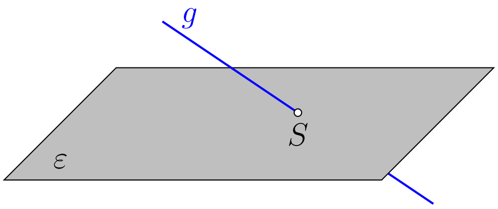
Bestimme alle Achsenabschnitte und Spurgeraden der Ebene $\varepsilon\colon 2x-3y+5z-10=0$

$S_x(a,0,0)$: $2a-10=0\Rightarrow a=5$
$S_y(0,b,0)$: $-3b-10=0\Rightarrow b=-10/3$
$S_z(0,0,c)$: $5c-10=0\Rightarrow c=2$

s_{xy}: $2x-3y-10=0 \quad (z=0)$
s_{yz}: $-3y+5z-10=0 \quad (x=0)$
s_{zx}: $2x+5z-10=0 \quad (y=0)$

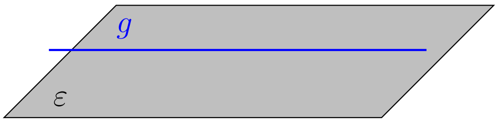
7.4 Gegenseitige Lage von Gerade und Ebene

Ein Schnittpunkt



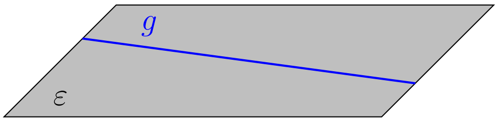
Die Gerade g schneidet die Ebene ε in einem Punkt.

Kein Schnittpunkt



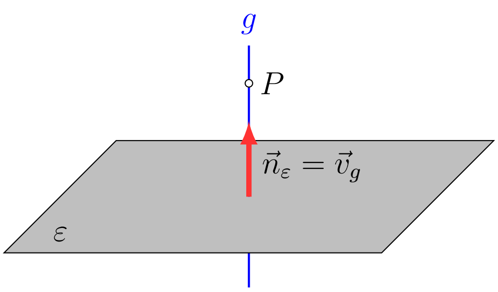
Die Gerade g verläuft parallel zur Ebene ε.

Zwei Schnittpunkte



Die Gerade g liegt in der Ebene ε.

Bestimme eine Gleichung der Geraden g, die senkrecht zur Ebene $\varepsilon\colon x - 2y + 3z - 7 = 0$ steht und durch den Punkt $P(-2, 3, 8)$ geht.



$$\vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{v}_g \quad \Rightarrow \quad g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

In welchem Punkt schneidet die Gerade

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Ebene $\varepsilon\colon 7x - 2y + 3z + 39 = 0$?

Komponenten von g: $x = -2 + 3t$, $y = 4 - t$, $z = 3 + t$

in ε einsetzen:

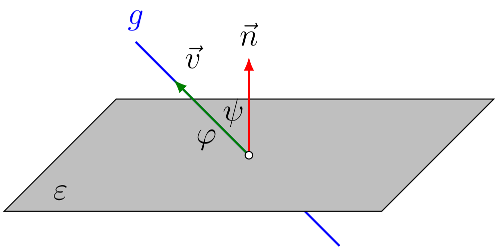
$$\begin{aligned} 7(-2+3t) - 2(4-t) + 3(3+t) + 39 &= 0 \\ -14 + 21t - 8 + 2t + 9 + 3t + 39 &= 0 \\ 26t + 26 &= 0 \\ t &= -1 \end{aligned}$$

$t = -1$ in g einsetzen: $S(-5, 5, 2)$

In welchem Winkel schneidet die Gerade

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

die Ebene $\varepsilon\colon x + 2y - 2z + 1 = 0$?

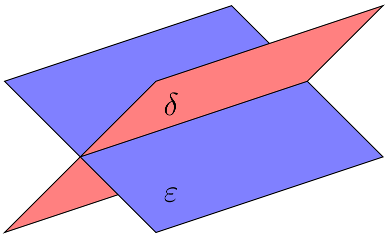


$$\psi = \arccos \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|} = \arccos \frac{4}{3 \cdot 3} = 63.61^\circ$$

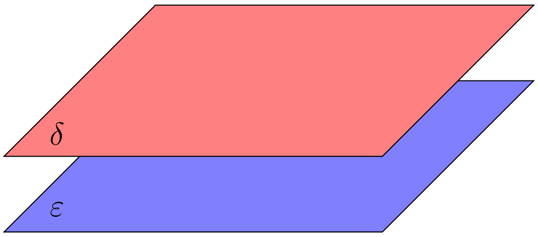
$\varphi = 90^\circ - 63.61^\circ = 26.39^\circ$

oder direkt: $\varphi = \arcsin \dfrac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|} = \arcsin \dfrac{4}{3 \cdot 3} = 26.39^\circ$

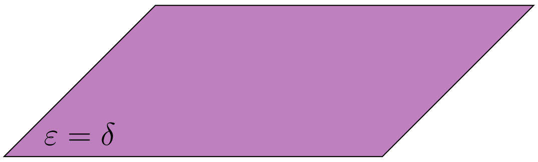
7.5 Gegenseitige Lage von Ebenen



schneidend



parallel



zusammenfallend

	NV kollinear	NV nicht kollinear
einen Schnittpunkt	zusammenfallend	schneidend
keinen Schnittpunkt	parallel	—

Untersuche die gegenseitige Lage der Ebenen ε und δ. Falls sich die Ebenen schneiden berechne den Schnittwinkel und eine Gleichung der Schnittgeraden.

Beispiel (a)

$\varepsilon\colon 6x - 8y + 4z + 9 = 0$
$\delta\colon 9x - 12y + 6z - 7 = 0$

$$\vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{n}_\delta = \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow 1.5 \cdot \vec{n}_\varepsilon = \vec{n}_\delta \text{ (kollinear)}$$

Wären die Ebenen identisch, so müsste $1.5 \cdot \varepsilon = \delta$ gelten, was offenbar nicht der Fall ist.

$\Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$

Beispiel (b)

$\varepsilon\colon 2x + 2y + 3z + 8 = 0$
$\delta\colon 5x + 2y + 4z + 7 = 0$

$\vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_\delta = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sind nicht kollinear.

$\Rightarrow$ ε und δ schneiden sich.

Richtungsvektor der Schnittgeraden:

$$\vec{n}_\varepsilon \times \vec{n}_\delta = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Hilfsebene durch $(0, 0, 0)$ und senkrecht zu $\vec{v}$:

$\zeta\colon 2x + 7y - 6z = 0$

$$\begin{aligned} &2x + 2y + 3z = -8 \\ &5x + 2y + 4z = -7 \quad \Rightarrow \quad S(1, -2, -2) \\ &2x + 7y - 6z = 0 \end{aligned}$$

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

(spitzer) Schnittwinkel:

$$\varphi = \arccos \frac{|\vec{n}_\varepsilon \cdot \vec{n}_\delta|}{|\vec{n}_\varepsilon| \cdot |\vec{n}_\delta|} = \arccos \frac{26}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{45}} \approx 19.94^\circ$$

Beispiel (c)

$\varepsilon\colon 4x + 2y - 2z + 6 = 0$
$\delta\colon -2x - y + z - 3 = 0$

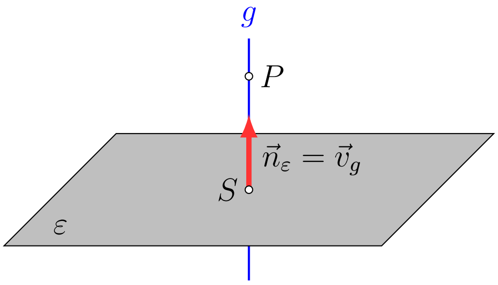
Wegen $-2 \cdot \delta = \varepsilon$ gilt $\varepsilon = \delta$.

7.6 Abstandsberechnungen

Abstand Punkt–Ebene

Gegeben: $P(x_P, y_P, z_P)$ und $\varepsilon\colon n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z + d = 0$

Gesucht: $P\varepsilon = \text{dist}(P, \varepsilon)$



Normale g auf ε durch P: $\vec{r} = \vec{r}_P + t\vec{n}$ $\quad g \cap \varepsilon = \{S\}$:

$$\begin{aligned}
\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_A) &= 0 \quad (A \in \varepsilon) \\
\vec{n} \cdot (\vec{r}_P + t\vec{n}) - \vec{n} \cdot \vec{r}_A &= 0 \\
\vec{n} \cdot \vec{r}_P + t\vec{n} \cdot \vec{n} - \vec{n} \cdot \vec{r}_A &= 0 \\
t\vec{n} \cdot \vec{n} &= \vec{n} \cdot \vec{r}_A - \vec{n} \cdot \vec{r}_P \\
t &= \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_A - \vec{n} \cdot \vec{r}_P}{\vec{n} \cdot \vec{n}} = \frac{-\vec{n} \cdot (\vec{r}_P - \vec{r}_A)}{|\vec{n}\,|^2}
\end{aligned}$$

$$P\varepsilon = PS = \left|t\vec{n}\right| = |t| \cdot \left|\vec{n}\right| = \frac{\left|\vec{n} \cdot (\vec{r}_P - \vec{r}_A)\right|}{|\vec{n}|}$$

$$P\varepsilon = \frac{|n_1 x_P + n_2 y_P + n_3 z_P + D|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \text{ Hessesche Normalform}$$

Beispiel (a)

Berechne den Abstand $P\varepsilon$ vom Punkt $P(5, 2, 1)$ zur Ebene $\varepsilon\colon x + 4y + 8z + 1 = 0$.

$\vec{n}_\varepsilon = (1, 4, 8)^\text{T}$

$$P\varepsilon = \frac{|1 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + 8 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 4^2 + 8^2}} = \frac{22}{9}$$

Ohne Betragzeichen lässt sich $P\varepsilon$ wie folgt deuten:

falls $P\varepsilon > 0$: P liegt im Halbraum in Richung von $\vec{n}_\varepsilon$.

falls $P\varepsilon < 0$: P liegt im Halbraum in Richtung von $-\vec{n}_\varepsilon$.

Beispiel (b)

Gesucht: Abstand des Punktes $P(5, -1, 3)$ von der Ebene $\varepsilon\colon 9x + 20y + 12z + 14 = 0$

$$d = \frac{|9 \cdot 5 + 20 \cdot (-1) + 12 \cdot 3 + 14|}{\sqrt{9^2 + 20^2 + 12^2}} = \frac{75}{25} = 3$$

Beispiel (c)

Abstand des Ebene $\varepsilon\colon 4x - 10y + 3z - 25 = 0$ vom Ursprung.

$$d = \frac{|4 \cdot 0 - 10 \cdot 0 + 7 \cdot 0 - 25|}{\sqrt{16 + 100 + 9}} = \frac{25}{\sqrt{125}} = \sqrt{5}$$

Beispiel (d)

Liegen die Punkte $P_1(0, 1, -9)$ und $P_2(-1, -3, 8)$ im gleichen Halbraum der Ebene $\varepsilon\colon 3x + 12y - 4z + 1 = 0$?

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= \frac{0 + 12 + 36 + 1}{\sqrt{9 + 144 + 16}} = \frac{49}{13} > 0 \\ d_2 &= \frac{-3 - 36 - 32 + 1}{\sqrt{9 + 144 + 16}} = \frac{-70}{13} < 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{Nein}$$

Abstand paralleler Ebenen

Weise nach, dass die Ebenen $\varepsilon_1\colon 2x - 2y + z - 7 = 0$ und $\varepsilon_2\colon 4x - 4y + 2z + 2 = 0$ parallel sind und bestimme ihren Abstand.

$$\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \vec{n_1}$$

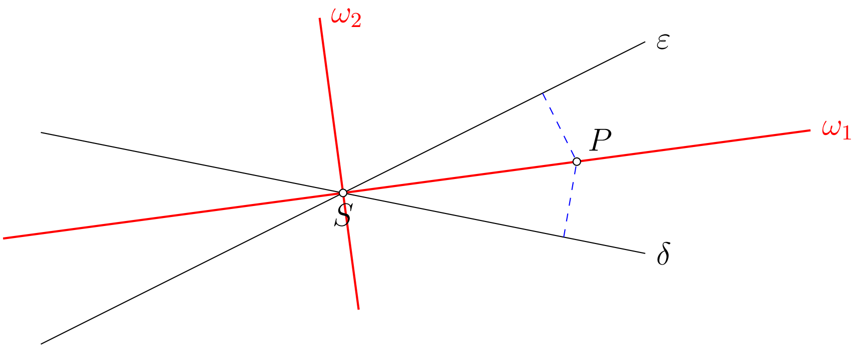
Wähle Punkt auf ε_1: $P(0, 0, 7)$

Abstand von P zu ε_2:

$$d = \frac{|4 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 2 \cdot 7 + 2|}{\sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2}} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

7.7 Die Winkelhalbierenden zweier Ebenen

Schneiden sich zwei Ebenen ε und δ in der Geraden s, so gibt es zwei winkelhalbierende Ebenen ω_1 und ω_2. Das Bild zeigt zwei Ebenen und ihre Winkelhalbierenden in projizierender Lage.



$P(x, y, z)$ liegt genau dann auf einer der Winkelhalbierenden, wenn er von ε und δ den gleichen Abstand hat.

Da der Abstand eines Punktes von einer Ebene mit der Hesseschen Normalforme berechnet werden kann, lässt sich die obige Aussage auch so formulieren:

$P \in \omega_1$ oder $P \in \omega_2$

$\dfrac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \dfrac{|Ex+Fy+Gz+H|}{\sqrt{E^2+F^2+G^2}}$

Um die Beträge weglassen zu können, müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

Haben beide Zähler gleiches Vorzeichen, so gilt:

$$\omega_1\colon \frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{Ex+Fy+Gz+H}{\sqrt{E^2+F^2+G^2}}$$

Haben beide Zähler unterschiedliche Vorzeichen, so gilt:

$$\omega_2\colon \frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = -\frac{Ex+Fy+Gz+H}{\sqrt{E^2+F^2+G^2}}$$

Beispiel

Bestimme die Winkelhalbierende der Ebenen

$\varepsilon\colon 2x-y+2z+3=0$ und $\delta\colon x+4y+8z-5=0$.

1. Winkelhalbierende:

$\dfrac{2x-y+2z+3}{3} = \dfrac{x+4y+8z-5}{9}$

$6x-3y+6z+9 = x+4y+8z-5$

$\omega_1\colon 5x-7y-2z+14=0$

2. Winkelhalbierende:

$\dfrac{2x-y+2z+3}{3} = -\dfrac{x+4y+8z-5}{9}$

$6x-3y+6z+9 = -x-4y-8z+5$

$\omega_2\colon 7x+y+14z+4=0$

8 Die Kugel

8.1 Die Kugelgleichung

Eine Kugel K ist durch ihren Mittelpunkt M und ihren Radius ϱ bestimmt.

Jeder Punkt $P \in K(M, \varrho)$ hat den Abstand ϱ von M. Daraus ergibt sich die *Gleichung einer Kugelsphäre* für $\vec{r} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$:

$K\colon \left|\vec{r} - \vec{r}_M\right| = \varrho$

Mit der Beziehung $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$ ergibt sich daraus:

$K\colon \left(\vec{r} - \vec{r}_M\right) \cdot \left(\vec{r} - \vec{r}_M\right) = \varrho^2 \quad \text{bzw.} \quad \left(\vec{r} - \vec{r}_M\right)^2 \ = \varrho^2$

und in Koordinatenform:

$K\colon (x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 + (z - z_m)^2 = \varrho^2$

Beispiel 8.1

Kugel mit $M(3, -1, 2)$ und $\varrho = 7$:

$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 49$

$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z + 14 = 49$

$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z - 35 = 0$

Eine quadratische Gleichung der Form

$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

kann umgekehrt als Kugelgleichung gedeutet werden. Durch quadratisches Ergänzen erhält man:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d = \varrho^2$$

Wegen $\varrho^2 > 0$ muss folgende Bedingung erfüllt sein:

$a^2 + b^2 + c^2 > 4d$

8.2 Schnitt von Kugel und Gerade

Sind Gleichungen einer Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$$

und einer Kugel

$$K\colon (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = \varrho^2$$

gegeben, so löst man das Schnittproblem durch Einsetzen der Komponenten der Geradengleichung in die Kugelgleichung:

$$K\colon (x_A + tx_v - x_M)^2 + (y_A + ty_v - y_M)^2 + (z_A + tz_v - z_M)^2 = \varrho^2$$

und anschliessendem Auflösen nach t.

Abhängig von der Lösungsmenge der quadratischen Gleichung erhält man:

- zwei Lösungen t_1, t_2: zwei *Durchstosspunkte* P_1, P_2
- eine Lösung: t: ein *Berührpunkt* P
- keine Lösung: Die Gerade *meidet* die Kugel.

Beispiel 8.2

Schneide $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

mit der Kugel mit $M(-4, 2, 3)$ undf $\varrho = 9$.

$$\begin{aligned} ([5 + 2t] + 4)^2 + ([2 + 2t] - 2)^2 + ([3 + t] - 3)^2 &= 81 \\ (2t + 9)^2 + (2t)^2 + (t)^2 &= 81 \\ 9t^2 + 36t + 81 &= 81 \\ t^2 + 4t &= 0 \\ t(t + 4) &= 0 \end{aligned}$$

$t_1 = 0 \Rightarrow P_1(5, 2, 3)$ und $t_2 = -4 \Rightarrow P_2(-3, -6, -1)$

8.3 Schnitt von Kugel und Ebene

Sind Gleichungen einer Kugel

$K\colon (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = \varrho^2$

und einer Ebene

$E\colon ax + by + cz + d = 0$

1. Gleichung der Lotgeraden $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$
2. Mittelpunkt des Schnittkreises: $M' = g \cap E$
3. Radius des Schnittkreises: $r^2 = \varrho^2 - d(M', E)^2$

Geometrische Interpretation der Lösung:

- $r^2 > 0$: *Schnittkreis*
- $r^2 = 0$: *Berührpunkt*
- $r^2 < 0$: Die Ebene *meidet* die Kugel.

Beispiel 8.3

Gegeben: Kugel K mit $M(-7, -1, 6)$ und $\varrho = 5$
Ebene $E\colon 4x + 2y + z + 3 = 0$

Gesucht: Mittelpunkt M' und Radius r des (allfälligen) Schnittkreises von K und E.

- $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $E \cap g$:

  $$\begin{aligned} 4(-7 + 4t) + 2(-1 + 2t) + (6 + t) + 3 &= 0 \\ 21t - 21 &= 0 \\ t &= 1 \quad \Rightarrow \quad M'(-3, 1, 7) \end{aligned}$$

- $d(M, M') = \sqrt{(-3 + 7)^2 + (1 + 1)^2 + (7 - 6)^2} = \sqrt{21}$

  $r^2 = 25 - 21 = 4 \quad \Rightarrow \quad r = 2$

8.4 Schnitt von zwei Kugeln

Gegeben sind die Gleichungen zweier Kugeln $K_1(M_1, \varrho_1)$ und $K_2(M_2, \varrho_2)$:

$K_1\colon (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = \varrho_1^2$

$K_2\colon (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = \varrho_2^2$

1. Subtraktion der Kugelgleichungen: $E\colon n_1x + n_2y + n_3y + d = 0$ (Polarebene)
2. Lotgerade durch die Kugelmittelpunkte: $g\colon \vec{r} = \vec{r}_{M_1} + t \cdot \vec{n}$ mit $\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2}$
3. Mittelpunkt des (allfälligen) Schnittkreises: $M' = g \cap E$
4. Radius des (allfälligen) Schnittkreises $r = \sqrt{r_1^2 - d^2}$ mit $d = |M_1M'|$

Geometrische Interpretation der Lösung:

- $|\varrho_1 - \varrho_2| < \overline{M_1M_2} < \varrho_1 + \varrho_2$: Die Kugeln *schneiden* sich.
- $|\varrho_1 - \varrho_2| = \overline{M_1M_2}$ Die Kugeln *berühren sich innen.*
- $\varrho_1 + \varrho_2 = \overline{M_1M_2}$ Die Kugeln *berühren sich aussen.*
- $|\varrho_1 - \varrho_2| > \overline{M_1M_2}$ Die Kugeln *liegen ineinander.*
- $\varrho_1 + \varrho_2 > \overline{M_1M_2}$ Die Kugeln *liegen auseineinander.*

Beispiel 8.4

Gegeben: Kugeln K_1 mit $M_1(4, 3, 1)$, $\varrho_1 = 7$ und K_2 mit $M_2(1, 0, 4)$, $\varrho_1 = 2$

Gesucht: Mittelpunkt M' und Radius r des (allfälligen) Schnittkreises von K_1 und K_2.

- $K_1\colon (x - 4)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 - 7^2 = 0$
  $K_2\colon (x - 1)^2 + (y - 0)^2 + (z - 4)^2 - 2^2 = 0$

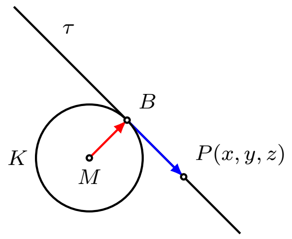
  $K_1 - K_2$: $-6x - 6y + 6z - 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad E\colon x + y - z + 6 = 0$
- $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $E \cap g$:

  $$(4 + t) + (3 + t) - (1 - t) + 6 = 0$$
  $$3t + 12 = 0$$
  $$t = -4 \quad \Rightarrow \quad M'(0, -1, 5)$$
- $d_1 = \text{dist}(M_1, M') = \sqrt{(4 - 0)^2 + (3 + 1)^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{48}$

  $r = \sqrt{r_1^2 - d^2} = \sqrt{49 - 48} = \sqrt{1} = 1$

8.5 Die Tangentialebene an eine Kugel

projizierende Darstellung von Kugel K und Tangentialebene τ:



Sind K und $B \in K$ gegeben, so ist $\overrightarrow{MB}$ sowohl Radiusvektor als auch Normalenvektor von τ und es gilt:

$\tau\colon \left(\vec{r}_B - \vec{r}_M\right)\left(\vec{r}_P - \vec{r}_B\right) = 0$

Addiert man den Nullvektor im zweiten Faktor, so lässt sich die Gleichung der Tangentialebene in einer anderen Form darstellen:

$$\begin{aligned}
\left(\vec{r}_B - \vec{r}_M\right)\left(\vec{r}_P - \vec{r}_B\right) &= 0\\
\left(\vec{r}_B - \vec{r}_M\right)\left(\vec{r}_P - \vec{r}_M + \vec{r}_M - \vec{r}_B\right) &= 0\\
\left(\vec{r}_B - \vec{r}_M\right)\left[\left(\vec{r}_P - \vec{r}_M\right) + \left(\vec{r}_M - \vec{r}_B\right)\right] &= 0\\
\left(\vec{r}_B - \vec{r}_M\right)\left(\vec{r}_P - \vec{r}_M\right) + \left(\vec{r}_B - \vec{r}_M\right)\left(\vec{r}_M - \vec{r}_B\right) &= 0\\
\left(\vec{r}_B - \vec{r}_M\right)\left(\vec{r}_P - \vec{r}_M\right) - \left(\vec{r}_B - \vec{r}_M\right)\left(\vec{r}_B - \vec{r}_M\right) &= 0\\
\left(\vec{r}_B - \vec{r}_M\right)\left(\vec{r}_P - \vec{r}_M\right) - \varrho^2 &= 0\\
\left(\vec{r}_B - \vec{r}_M\right)\left(\vec{r}_P - \vec{r}_M\right) &= \varrho^2
\end{aligned}$$

Liegt ein Punkt P ausserhalb einer Kugel K, so existiert eine ganze Schar von Tangentialebenen an K durch P.

Die Tangentialebenen τ an eine Kugel sind jedoch eindeutig bestimmt, wenn eine die Kugel K meidende Gerade g mit $g \subset \tau$ gegeben ist.

Ist $g\colon \vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{v}$ eine die Kugel $K\colon \left(\vec{r} - \vec{r}_M\right)^2 = \varrho^2$ meidende Gerade und $B(x, y, z)$ der gesuchte Berührpunkt, so gilt

$$\begin{aligned}
\left(\vec{r}_B - \vec{r}_M\right)^2 &= \varrho^2\\
\left(\vec{r}_B - \vec{r}_M\right)\vec{v} &= 0\\
\left(\vec{r}_B - \vec{r}_M\right)\left(\vec{r}_A - \vec{r}_M\right) &= \varrho^2
\end{aligned}$$