

Aufgabe 8.1

$$M(-1, -2, -1)$$

$$\overrightarrow{MP} = \vec{r}_P - \vec{r}_M = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\varrho^2 = \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = 1 + 9 + 81 = 91$$

$$(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 91$$

Aufgabe 8.2

(a) quadratische Ergänzung:

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y + z^2 - 8z = -1$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 8z + 16 = -1 + 1 + 4 + 16$$

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 = 20$$

$$M(-1, 2, 4), \varrho = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

(b) keine Kugel (wegen $-y^2$)

(c) quadratische Ergänzung:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 2y - 6z + 47 = 0$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 6z + 9 = -47 + 36 + 1 + 9$$

$$(x - 6)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = -1$$

keine Kugel (negativer Radius)

(d) keine Kugel (Kreislinie in π_3)

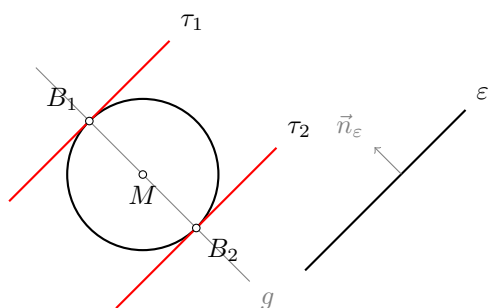
Aufgabe 8.3

$$M(9, 3, -1), \varrho = \sqrt{62}; g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(x-9)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 &= (\sqrt{62})^2 \\
([12]-9)^2 + ([3+t]-3)^2 + ([4+t]+1)^2 &= 62 \\
3^2 + t^2 + (t+5)^2 &= 62 \\
9 + t^2 + t^2 + 10t + 25 &= 62 \\
2t^2 + 10t - 28 &= 0 \\
t^2 + 5t - 14 &= 0 \\
(t-2)(t+7) &= 0 \\
t_1 &= 2 \\
t_2 &= -7
\end{aligned}$$

Schnittpunkte: $P_1(12, 5, 6)$, $P_2(12, -4, -3)$

Aufgabe 8.4



Kugelfläche: $K: (x-8)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 49$

Gerade durch M normal zu ε : $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$K \cap g$:

$$\begin{aligned}
([8+2t]-8)^2 + ([1-6t]-1)^2 + ([z+3t]-3)^2 &= 49 \\
(2t)^2 + (-6t)^2 + (3t)^2 &= 49 \\
49t^2 &= 49 \\
t^2 &= 1 \\
t_1 &= 1 \\
t_2 &= -1
\end{aligned}$$

Schnittpunkte: $S_1(10, -5, 6)$, $S_2(6, 7, 0)$

Die Schnittpunkte der Geraden mit der Kugelfläche sind die Berührungspunkte der Tangentialebenen τ_1 und τ_2 .

$$S_1(10, -5, 6) \in \tau_1: d_1 = -\vec{n} \cdot \vec{r}_{S_1} = - \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = -68$$

$$\tau_1: 2x - 6y + 3z - 68 = 0$$

$$S_2(6, 7, 0) \in \tau_2: d_2 = -\vec{n} \cdot \vec{r}_{S_2} = - \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = 30$$

$$\tau_2: 2x - 6y + 3z + 30 = 0$$

Aufgabe 8.5

$$\text{Gerade durch } M \text{ normal zu } \varepsilon: g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$g \cap \varepsilon: 3(4 + 3t) + (7 + t) + 2(3 + 2t) + 3 = 0$$

$$9t + t + 4t + 12 + 7 + 6 + 3 = 0$$

$$14t + 28 = 0$$

$$t = -2$$

Mittelpunkt des Schnittkreises: $A(-2, 5, -1)$

$$d = |\vec{r}_A - \vec{r}_M| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{36 + 4 + 16} = \sqrt{56} < \varrho \text{ (ok)}$$

$$\text{Schnittkreisradius: } r = \sqrt{\varrho^2 - d^2} = \sqrt{81 - 56} = \sqrt{25} = 5$$

Aufgabe 8.6

$$(a) \overline{M_1 M_2} = |(-14, 8, -6)^T| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\overline{M_1 M_2} = 3\sqrt{2} < 5 = |\varrho_1 - \varrho_2|$$

Die Kugeln liegen ineinander.

$$(b) \overline{M_1 M_2} = |(2, 11, 10)^T| = 15$$

$$\overline{M_1 M_2} = 15 = \varrho_1 + \varrho_2$$

Die Kugeln berühren sich aussen.

$$(c) |M_1 M_2| = |(-3, 5, -8)^T| = 7\sqrt{2}$$

$$|\varrho_1 - \varrho_2| = 4 < \overline{M_1 M_2} < 10 = \varrho_1 + \varrho_2$$

Die Kugeln schneiden sich.

$$(d) |M_1 M_2| = |(2, 6, 3)^T| = 7$$

$$\overline{M_1 M_2} = 7 = |\varrho_1 - \varrho_2|$$

Die Kugeln berühren sich innen.

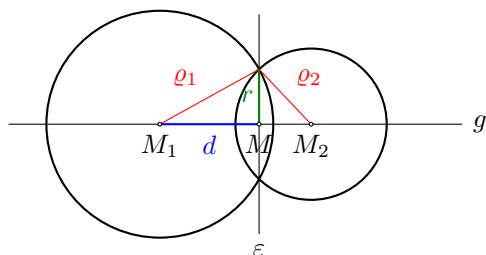
$$(e) |M_1 M_2| = |(4, -11, -4)^T| = 3\sqrt{17}$$

$$\overline{M_1 M_2} = 12.37 > 6 = \rho_1 + \rho_2$$

Die Kugeln liegen auseinander.

Aufgabe 8.7

projizierende Darstellung der sich schneidenden Kugeln:



Schnittkreisebene ε :

$$K_1: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 7$$

$$K_2: x^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 16$$

$$K_1: x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 = 7$$

$$K_2: x^2 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 2z + 1 = 16$$

Kugelgleichungen subtrahieren und vereinfachen:

$$-2x + 1 + 2y - 5 + 2z - 1 = -9$$

$$-2x + 2y + 2z + 4 = 0$$

$$\varepsilon: x - y - z - 2 = 0$$

Mittelpunkt M des Schnittkreises:

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade durch die Kugelmittelpunkte: } g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$g \cap \varepsilon$:

$$(1 - t) - (2 + t) + t - 2 = 0$$

$$-t - 3 = 0$$

$$t = -1$$

$$M(2, 1, -1)$$

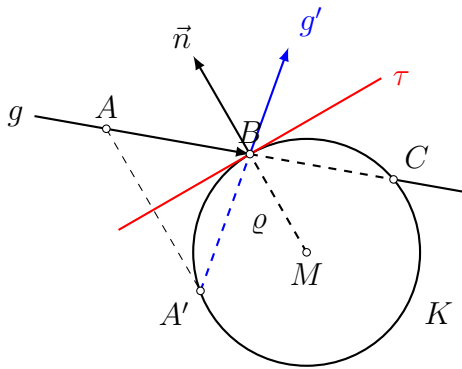
Radius r des Schnittkreises:

$$d = \overline{M_1 M} = |\vec{r}_M - \vec{r}_{M_1}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

$$r = \sqrt{\varrho_1^2 - d^2} = \sqrt{7 - 3} = \sqrt{4} = 2$$

Aufgabe 8.8



$$K: (x - 8)^2 + y^2 + (z + 7)^2 = 5$$

$$g \cap K: [x = 5 + t, y = -4 + t, z = -2 - t]$$

$$(5 + t - 8)^2 + (-4 + t)^2 + (-2 - t + 7)^2 = 5$$

$$(t - 3)^2 + (t - 4)^2 + (-t + 5)^2 = 5$$

$$t^2 - 6t + 9 + t^2 - 8t + 16 + t^2 - 10t + 25 = 5$$

$$3t^2 - 24t + 45 = 0$$

$$t^2 - 8t + 15 = 0$$

$$(t - 3)(t - 5) = 1$$

$$t_1 = 3$$

$$t_2 = 5$$

$B(8, -1, -5)$ (der zweite Schnittpunkt C ist weiter entfernt)

$$\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

$$d = -\vec{n} \cdot \vec{r}_B = - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = 9$$

$$\tau: -y + 2z + 9 = 0$$

$A(5, -4, -2)$ an τ spiegeln:

$$\text{Lot von } A \text{ auf } \tau: \ell: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\tau \cap \ell:$$

$$-(-4 - t) + 2(-2 + 2t) + 9 = 0$$

$$4 + t - 4 + 4t + 9 = 0$$

$$5t + 9 = 0$$

$$t_0 = -9/5 = -1.8$$

$t = 2t_0 = -3.6$ in ℓ einsetzen: $A'(5, -0.4, -9.2)$

$$\overrightarrow{A'B} = \vec{r}_B - \vec{r}_{A'} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -0.4 \\ -9.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -0.6 \\ 4.2 \end{pmatrix} = \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$g': \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$