Aufgabe 7.1

Richtungsvektoren von ε: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor von ε: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 16 \\ 64 \\ 48 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{n}_\varepsilon$

$A(5,-3,8) \in \varepsilon$: $1 \cdot 5 + 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 8 + D = 0$

$D = -17$

ε: $x + 4y + 3z - 17 = 0$

Aufgabe 7.2

Richtungsvektoren von ε: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ortsvektor zum Punkt $A(5,-3,8)$: $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$\varepsilon: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.3

Setze $P(5,0,4)$in ε: $2x - y + 3z - 22 = 0$ ein:

$2 \cdot 5 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 4 - 22 = 0$

$0 = 0$

$\Rightarrow \quad P \in \varepsilon$

Aufgabe 7.4

Setze $P(-6,8,-3)$ in ε: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein:

$$\begin{aligned} -6 &= 1 + 5s + 1t \\ 8 &= 0 - 1s + 2t \\ -3 &= 3 + 2s - 1t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 5s + 1t &= -7 \\ -1s + 2t &= 8 \\ 2s - 1t &= -6 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{keine Lösung}$$

$\Rightarrow \quad P \notin \varepsilon$

Aufgabe 7.5

Die parallelen Ebenen ε und δ haben den gleichen Normalenvektor. Durch Einsetzen eines Punktes $P \in \delta$ kann D_δ von δ bestimmt werden:

$$\begin{aligned} P(5,1,4) \in \delta\colon 2 \cdot x + (-1) \cdot y + 3 \cdot z + D_\delta &= 0 \\ 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 4 + D_\delta &= 0 \\ D_\delta &= -21 \end{aligned}$$

$\delta\colon 2x - y + 3z - 21 = 0$

Aufgabe 7.6

$\vec{v}_g = \vec{n}_\varepsilon$

$P(2,3,-1) \in \varepsilon\colon (-2) \cdot x + 1 \cdot y + 2 \cdot z + D = 0$

$$\begin{aligned} (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + D &= 0 \\ D &= 3 \end{aligned}$$

$\varepsilon\colon -2x + y + 2z + 3 = 0$

Aufgabe 7.7

Achsenabschnitte:

$A(a|0|0) \in \varepsilon\colon 4 \cdot a + (-3) \cdot 0 + 6 \cdot 0 - 12 = 0 \Rightarrow a = 3$

$B(0|b|0) \in \varepsilon\colon 4 \cdot 0 + (-3) \cdot b + 6 \cdot 0 - 12 = 0 \Rightarrow b = -4$

$C(0|0|c) \in \varepsilon\colon 4 \cdot 0 + (-3) \cdot 0 + 6 \cdot c - 12 = 0 \Rightarrow c = 2$

Spuren:

$$s_1\colon \vec{r} = \vec{r}_A + t \cdot \overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow \quad s_1\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$s_2\colon \vec{r} = \vec{r}_B + t \cdot \overrightarrow{BC} \quad \Rightarrow \quad s_2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$s_3\colon \vec{r} = \vec{r}_C + t \cdot \overrightarrow{CA} \quad \Rightarrow \quad s_3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.8

$\varepsilon \cap g$:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-9 - 5 \cdot t) + 0 \cdot (11 + 2 \cdot t) + 5 \cdot (9 + 4 \cdot t) - 8 &= 0 \\ 5 \cdot t + 10 &= 0 \\ t &= -2 \end{aligned}$$

Setze $t = -2$ in g ein $\quad \Rightarrow \quad g \cap \varepsilon = S(1,7,1)$

Aufgabe 7.9

$\varepsilon \cap g$:

$$\begin{aligned} -3(4 + 2t) - 2(3 + 1t) + 2(-6 + 4t) - 1 &= 0 \\ 0 \cdot t - 31 &= 0 \end{aligned}$$

keine Lösung $\quad \Rightarrow \quad g \parallel \varepsilon$

Aufgabe 7.10

$\varepsilon \cap g$:

$$\begin{aligned} -3(-1-2t)+1(2+2t)-8(2+1t)11 &= 0 \\ 0\cdot t + 0 &= 0 \end{aligned}$$

Jedes $t \in \mathbb{R}$ ist Lösung. $\quad \Rightarrow \quad g \subset \varepsilon$

Aufgabe 7.11

Mittelpunkt der Strecke von $A(3,8,0)$ nach $B(11,4,4)$: $M(7,6,2)$

Der Richtungsvektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von μ.

$$\begin{aligned} M(7,6,2) \in \mu\colon\ 2\cdot x + (-1)\cdot y + 1\cdot z + D &= 0 \\ 2\cdot 7 + (-1)\cdot 6 + 1\cdot 2 + D &= 0 \\ D &= -10 \end{aligned}$$

MNE: $\mu\colon 2x - y + z - 10 = 0$

Aufgabe 7.12

Die Koordinaten des gesuchten Schnittpunkts $S(x,y,z)$ müssen alle drei Ebenengleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} 2x+y+3z-25 &= 0 & & 2\cdot x + 1\cdot y + 3\cdot z = 25 \\ 5x+z-44 &= 0 & \Rightarrow\quad & 5\cdot x + 0\cdot y + 1\cdot z = 44 \\ 6x+5y+2z-41 &= 0 & & 6\cdot x + 5\cdot y + 2\cdot z = 41 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad S(8,-3,4)$

Aufgabe 7.13

Normalenvektor von ε: $\vec{n}_\varepsilon = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$

Richtungsvektor von g: $\vec{v}_g = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$

$$\varphi' = \arccos \frac{|\vec{n}_\varepsilon \cdot \vec{v}_g|}{|\vec{n}_\varepsilon| \cdot |\vec{v}_g|} = \arccos \frac{|10|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{25}} = 48.19^\circ$$

$\varphi = 90 - \varphi' = 41.81^\circ \quad$ [oder direkt mit $\arcsin(\dots)$]

Aufgabe 7.14

Lot von $P(11,-2,8)$ auf ε: $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Koordinatengleichungen von g in ε einsetzen:

$$
\begin{aligned}
1 \cdot (11 + 1 \cdot t) - 1 \cdot (-2 - 1 \cdot t) + 2 \cdot (8 + 2 \cdot t) - 11 &= 0 \\
6 \cdot t + 18 &= 0 \\
t &= -3
\end{aligned}
$$

$2t = -6$ in g einsetzen: $P'(5, 4, -4)$

Aufgabe 7.15

Lot von $P(8, -4, 9)$ auf ε: $g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$g \cap \varepsilon \to S$:

$$
\begin{aligned}
2 \cdot (8 + 2 \cdot t) - 1 \cdot (-4 - 1 \cdot t) + 2 \cdot (9 + 2 \cdot t) - 2 &= 0 \\
9 \cdot t + 36 &= 0 \\
t &= -4
\end{aligned}
$$

$t = -4$ in g einsetzen: $S(0, 0, 1)$

Abstand: $|\overrightarrow{SP}| = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = 12$