Aufgabe 6.1

(a) Ortsvektor zum Punkt $A(5,-3,2)$ auf der Geraden g.

(b) Richtungsvektor der Geraden g

(c) $$\begin{array}{rcl} -7 = 5+4t & & -12 = 4t & & t=-3 \\ -6 = -3+t & \Leftrightarrow & -3 = t & \Leftrightarrow & t=-3 \\ 11 = 2-3t & & 9 = -3t & & t=-3 \end{array}$$

$\Rightarrow \quad P(-7,-6,11) \in g$

Aufgabe 6.2

(a) Richtungsvektor: $\vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$

(Richtungsvektoren dürfen gestreckt/gestaucht werden)

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Wähle den Ortsvektor zu einem beliebigen Punkt von g – hier A)

(b) Da die x-Komponete des Richtungsvektors null ist, muss die Gerade parallel zur yz-Ebene (π_2) liegen. Also handelt es sich um eine *zweite Hauptgerade*.

Aufgabe 6.3

(a) $$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Die y-Komponente im Richtungsvektor kann einen willkürlichen Wert $\neq 0$ haben.)

(b) Welche spezielle Lage hat diese Gerade?

Da der Richtungsvektor von g parallel zur y-Achse ist, steht g senkrecht zur xz-Ebene (π_3). Daher handelt es sich ume eine *drittprojizierende* Gerade.

Aufgabe 6.4

(a) Die Spurpunkte von g sind die (allfälligen) Schnittpunkte von g mit den Koordinatenebenen π_1, π_2 und π_3.

$S_1(x, y, 0)$: $0 = 6 + 2t \quad \Rightarrow \quad t = -3 \quad \Rightarrow \quad S_1(7, 12, 0)$

$S_2(0, y, z)$: $0 = 7 + 0t \quad \Rightarrow \quad$ keine Lösung $\quad \Rightarrow \quad$ kein S_2

$S_3(x, 0, z)$: $0 = 9 - t \quad \Rightarrow \quad t = 9 \quad \Rightarrow \quad S_3(7, 0, 24)$

(b) Da die x-Komponente des Richtungsvektors von g null ist, liegt g parallel zur π_2 (2. Hauptgerade). Deshalb kann es nur die zwei Spurpunkte S_1 und S_3 geben.

Aufgabe 6.5

- die Richtungsvektoren sind kollinear: $-\frac{2}{5}\begin{pmatrix}-10\\5\\15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\\-6\end{pmatrix}$

- Prüfe, ob z. B. $A(8, 3, -11) \in h$:

$$\begin{array}{rclcrclcl} 8 &=& -4 + 4t & & 12 &=& 4t & & t = 3 \\ 3 &=& 9 - 2t & \Rightarrow & -6 &=& -2t & \Rightarrow & t = 3 \;\Rightarrow\; A \in h \\ -11 &=& 7 - 6t & & -18 &=& -6t & & t = 3 \end{array}$$

Also: $g = h$

Aufgabe 6.6

die Richtungsvektoren sind kollinear, denn $\begin{pmatrix}-2\\2\\6\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}2\\-2\\-6\end{pmatrix}$

$A(5, 9, -9) \in h$?

$$\begin{pmatrix}5\\9\\-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\8\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-2\\-6\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} 12 &=& 2t \\ 1 &=& -2t \\ -14 &=& 6t \end{array}$$

keine Lösungen, $A \notin h \quad \Rightarrow \quad g \parallel h$.

Aufgabe 6.7

Die Richtunsvektoren sind nicht kollinear.

Gibt es einen gemeinsamen Punkt $\{S\} = g \cap h$?

$$\begin{pmatrix}3\\5\\-5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\5\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}-2s-3t&=-10\\5s-5t&=-4\\3s+2t&=7\end{aligned}$$

keine Lösungen

Die Geraden g und h sind windschief.

Aufgabe 6.8

- Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear.
- Gibt es einen gemeinsamen Punkt $\{S\} = g \cap h$?

  $$\begin{aligned}-15+2s&=-17+6t\\-1+s&=-2+3t\\19-2s&=5+2t\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}2s-6t&=-2\\s-3t&=-1\\-2s-2t&=-14\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}s&=5\\t&=2\end{aligned}$$

  Schnittpunkt: $S(-5, 4, 9)$
- spitzer Schnittwinkel: $\varphi = \arccos \dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \arccos \dfrac{11}{3\cdot 7} = 58.41\,^\circ$

Aufgabe 6.9

- Die Richtungsvektoren sind kollinear: $2\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\-4\end{pmatrix}$
- Teste, ob $A(3, 9, -6) \in h$:

  $$\begin{aligned}3&=-9+4t\\9&=7+2t\\-6&=2-4t\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}12&=4t\\2&=2t\\-8&=-4t\end{aligned} \quad \Rightarrow \begin{aligned}t&=3\\t&=1\\t&=2\end{aligned} \;\Rightarrow\; A \notin h \;\Rightarrow\; g \parallel h$$
- $d(g,h) = \dfrac{|\overrightarrow{AB}\times\vec{v}_g|}{|\vec{v}_g|} = \dfrac{\left|\begin{pmatrix}-12\\-2\\8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{12}{3} = 4$

(Statt mit $\vec{v}_g$ hätte man auch mit dem kollinearen Richtungsvektor $\vec{v}_h$ rechnen können)

Aufgabe 6.10

- Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear.

- $d(g,h) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{v}_g \times \vec{v}_h)\right|}{\left|\vec{v}_g \times \vec{v}_h\right|} = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}$

$$= \frac{|-90|}{15} = 6$$

- Da $\vec{v}_g \not\parallel \vec{v}_h$ und $d \neq 0$ sind die Geraden windschief.

Aufgabe 6.11

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -14 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -5 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}, \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{25+169+4} = 15$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}, \left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{64+64+16} = 12$$

$$w_\alpha\colon \vec{r} = \vec{r}_A + t\big[4\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}\big]$$

$$w_\alpha\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + t_\alpha \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (vereinfacht)}$$

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -5 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}, \left|\overrightarrow{BA}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = 15$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{9+36+36} = 9$$

$$w_\beta\colon \vec{r} = \vec{r}_B + t\big[3\overrightarrow{BA} + 5\overrightarrow{BC}\big]$$

$$w_\beta\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} + t_\beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (vereinfacht)}$$

$$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}, \left|\overrightarrow{CA}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = 12$$

$$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \ \left|\overrightarrow{CB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = 9$$

$$w_\gamma \colon \vec{r} = \vec{r}_C + t\left[3\overrightarrow{CA} + 4\overrightarrow{CB}\right]$$

$$w_\gamma \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + t_\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (vereinfacht)}$$

$w_\alpha \cap w_\beta$:

$$\begin{aligned} -3 + 5t_\alpha &= 2 \\ 7 - 8t_\alpha &= -7 + 2t_\beta \\ 4 + t_\alpha &= 2 + t_\beta \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} t_\alpha &= 1 \\ t_\beta &= 3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad S(2, -1, 5)$$

Es genügt zu prüfen, ob $S \in w_\gamma$:

$$\begin{aligned} 2 &= 5 + t_\gamma \\ -1 &= -1 \\ 5 &= 8 + t_\gamma \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad t_\gamma = -3$$

Also: $w_\alpha \cap w_\beta \cap w_\gamma = \{S(2, -1, 5)\}$