Aufgabe 8.1

(a) Für $h = 0.5$ hat die Fläche unter dem Graphen den Inhalt 1.

(b) $P(4 \leq X \leq 5) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Aufgabe 8.2

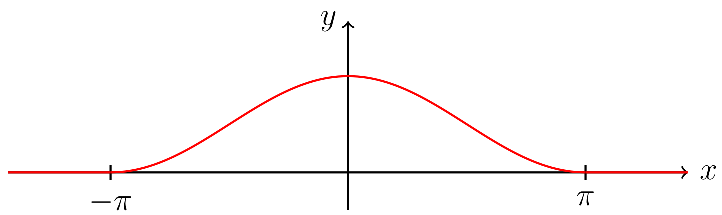
$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) = \mu &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{*}{=} \int_0^1 x \cdot 1\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{*}{=} \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

($*$) Da die Dichtefunktion ausserhalb des Intervalls $[0,1]$ überall den Wert Null hat, können wir uns bei der Integration auf diesen Bereich beschränken.

Aufgabe 8.3

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}(\cos x + 1) & \text{falls } -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



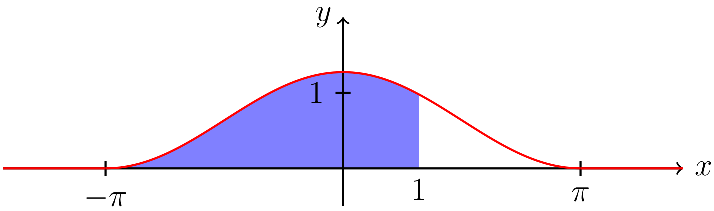
Aufgabe 8.3

(b) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}(\cos x + 1)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos x + 1)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2\pi}\big[\sin x + x\big]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\big[(0+\pi) - (0-\pi)\big]$$
$$= \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi$$
$$= 1$$

Also ist f eine Wahrscheinlichkeitsdichte.

Aufgabe 8.3

(c) Graph:



$$P(X \leq 1) = \int_{-\infty}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\overset{\text{(b)}}{=} \frac{1}{2\pi}\big[\sin x + x\big]_{-\pi}^{1}$$
$$= 0.7931$$

Aufgabe 8.4

(a) $P(X \geq 78) = \int_{78}^{\infty} \varphi_{80,2}(x)\mathrm{d}x = 0.8413$

(b) $P(78 \leq X \leq 82) = \int_{78}^{82} \varphi_{80,2}(x)\mathrm{d}x = 0.6827$

(c) $P(78 \leq X \leq 82) = \int_{78}^{82} \varphi_{80,4}(x)\mathrm{d}x = 0.3829$

Aufgabe 8.5

(a) X: Anzahl Punkte

$$P(X \leq 100) = \int_{-\infty}^{100} \varphi_{120,10}(x)\mathrm{d}x = 0.0228$$

(b) $P(X \geq 130) = \int_{130}^{\infty} \varphi_{120,10}(x)\mathrm{d}x = 0.1587$

Y: Anzahl Personen mit mehr als 130 Punkten
(binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0.1587$)

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^{20} = 0.9684$$

Aufgabe 8.6

(a) $P(X \geq 25) = \int_{25}^{\infty} \varphi_{18,6}(x)\mathrm{d}x = 0.1217$

(b) $P(X \geq 15) = \int_{15}^{\infty} \varphi_{18,6}(x)\mathrm{d}x = 0.6915$

(c) Y: Anzahl der Messungen mit Windgeschwindigkeit über 15 km/h
Y ist binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = 0.6915$ aus (b)

$$P_5(Y = 5) = p^5 = 0.1581$$

(d) Y: Anzahl der Messungen mit Windgeschwindigkeit über 15 km/h
Y ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0.6915$ aus (c)

$$\sum_{k=3}^{10} \binom{10}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{10-k} \quad = 0.9981$$

$1 -$ binomcdf(10,0.6915,*2*)