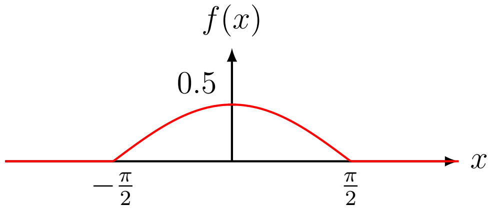
Aufgabe 8.1

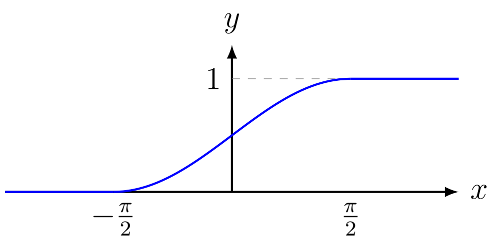
(a) $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, \mathrm{d}x = \big[\sin x\big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \big[\sin(\pi/2) - \sin(-\pi/2)\big]$$
$$= 1 - (-1) = 2 \quad \Rightarrow \quad a = \tfrac{1}{2}$$

(b) $$\tfrac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{x} \cos(t)\, \mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\big[\sin t\big]_{-\pi/2}^{x}$$
$$= \tfrac{1}{2}\big[\sin(x) - \sin(-\pi/2)\big] = \tfrac{1}{2}\sin(x) + \tfrac{1}{2}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2} & \text{für } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{für } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

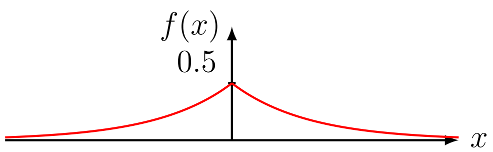
(c)

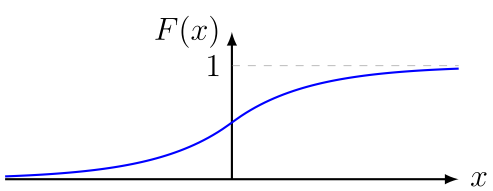




Aufgabe 8.2

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x} & \text{für } x \le 0 \\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$





Aufgabe 8.3

(a) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_1^k x^{-4}\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{1}{3}x^{-3}\right]_1^k$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{k^3}+\frac{1}{1^3}\right) = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow \quad a = 3$

(b) $P(1 < X < 2) = \int_1^2 3x^{-4}\,\mathrm{d}x = \cdots = 7/8$

$P(X > 5) = \lim_{k\to\infty}\int_5^k 3x^{-4}\,\mathrm{d}x = \cdots = 1/125$

(c) $$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot 3x^{-4}\,\mathrm{d}x = 3\int_{-\infty}^{\infty} x^{-3}\,\mathrm{d}x$$

$$= 3\lim_{k\to\infty}\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]_1^k = \frac{3}{2}\lim_{k\to\infty}\left[-\frac{1}{k^2}+\frac{1}{1^2}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot 3x^{-4}\,\mathrm{d}x = 3\int_{-\infty}^{\infty} x^{-2}\,\mathrm{d}x$$

$$= 3\lim_{k\to\infty}\left[-x^{-1}\right]_1^k = 3\lim_{k\to\infty}\left[-\frac{1}{k^2}+\frac{1}{1^2}\right] = 3$$

$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = 3 - (3/2)^2 = 3/4$

oder mit der Definition:

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - 3/2\right)^2 \cdot 3x^{-4}\,\mathrm{d}x = \cdots = 3/4$$

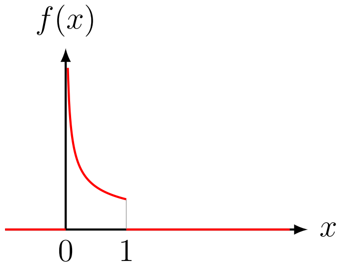
Aufgabe 8.4

Ist f eine Dichtefunktion?

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to 0}\int_s^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to 0}\left[\sqrt{x}\right]_s^1$$
$$= \lim_{s\to 0}\left(\sqrt{1}-\sqrt{s}\right) = 1$$

$y>0$: $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{4}{y^2}$

$y=0$: wähle $x \in \mathbb{R}\setminus(0,1]$ beliebig



Aufgabe 8.5

(a) $P(X \le 2) = P(-\infty < X \le 2) = F(2) - F(-\infty)$
$= 0.6 - 0 = 0.6$

mit (b): $P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 0.1 + 0.3 + 0.2 = 0.6$

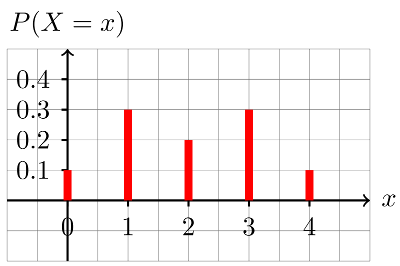
$P(X > 3) = P(3 < X \le \infty) = F(\infty) - F(3)$
$= 1 - 0.9 = 0.1$

mit (b): $P(X>3) = P(X=4) = 0.1$

$P(0 < X \le 4) = F(4) - F(0) = 1 - 0.1 = 0.9$

mit (b): $P(0 < X \le 4) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$
$= 0.3 + 0.2 + 0.3 + 0.1 = 0.9$

(b) Stabdiagramm:



Aufgabe 8.6

(a) Welcher Prozentsatz der Fahrzeuge überschreitet das Geschwindigkeitslimit?

$$P(X \geq 30) = \int_{30}^{\infty} \varphi_{32,7}(x)\,\mathrm{d}x = 0.6125$$

(b) Welcher Prozentsatz der Fahrer erhält ein Bussgeld, wenn dieses ab 35 km/h verhängt wird?

$$P(X \geq 35) = \int_{35}^{\infty} \varphi_{32,7}(x)\,\mathrm{d}x = 0.3341$$

Also 33.41% der Fahrer

(c) Die Geschwindigkeitsbegrenzung wird versuchsweise auf 50 km/h angehoben. Danach ergibt eine Messung, dass nur noch 30% der Fahrer das Limit überschreiten. Welche Durchschnittsgeschwindigkeit wird nun gefahren, wenn die Standardabweichung 10 km/h ist?

$P(X \geq 50) = 0.3 \quad$ (X ist μ-10-normalverteilt)

Ausdruck in die gleichwertige $\leq$-Form bringen:

$P(X \leq 50) = 0.7$

Transformiere X (μ-10-verteilt) in Z (0-1-verteilt):

$$P\left(\frac{X-\mu}{10} \leq \frac{50-\mu}{10}\right) = P\left(Z \leq z\right) = 0.7$$

$$z = \Phi_{0,1}^{-1}(0,7) = 0.5244 = \frac{50-\mu}{10} \quad \Rightarrow \quad \mu = 44.76 \text{ km/h}$$