Aufgabe 7.1

X: Die Summe der Augenzahlen bei dreimaligem Würfeln

(a) $$P(X=6) = 3\cdot P(1,1,4) + 6\cdot P(1,2,3) + P(2,2,2) = \frac{3}{216} + \frac{6}{216} + \frac{1}{216} = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$$

(b) $P(X>18) = 0$

(c) $$\begin{aligned} P(X \le 4) &= P(X=3) + P(X=4) \\ &= P(1,1,1) + 3P(1,1,2) \\ &= \frac{1}{216} + \frac{3}{216} = \frac{4}{216} = \frac{1}{54} \end{aligned}$$

Aufgabe 7.2

(a) $P(X=2) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_4\}) = 0.1 + 0.3 = 0.4$

(b) $P(X>4) = P(\{\omega_3\}) = 0.2$

(c) $$\begin{aligned} P(X^2<5) &= P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_4\}) + P(\{\omega_5\}) \\ &= 0.1 + 0.3 + 0.1 = 0.5 \end{aligned}$$

Aufgabe 7.3

(a) $P(X=4) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{125}{1296}$

(b) $$\begin{aligned} P(X \le 7) &= P(1) + P(2) + \cdots + P(7) \\ &= \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{5}{6} + \tfrac{1}{6}\cdot\left(\tfrac{5}{6}\right)^2 + \cdots + \tfrac{1}{6}\cdot\left(\tfrac{5}{6}\right)^6 \\ &= \tfrac{1}{6}\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^7}{1-\frac{5}{6}} = 0.7209 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} P(X>9) &= 1 - P(X \le 9) \\ &= 1 - \tfrac{1}{6}\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^9}{1-\frac{5}{6}} = 0.1938 \quad \text{SJ17/18: 0.1615} \end{aligned}$$

Aufgabe 7.4

(a) $P(X=4) = \binom{8}{4} \cdot 0.48^4 \cdot 0.52^4 = 0.2717$

(b) $P(X \leq 3) = \sum_{k=0}^{3} \binom{8}{k} \cdot 0.48^k \cdot 0.52^{8-k} = 0.4078$

(c) $$\begin{aligned} P(X > 5) &= 1 - P(X \leq 5) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{5} \binom{8}{k} \cdot 0.48^k \cdot 0.52^{8-k} = 0.1198 \end{aligned}$$

Aufgabe 7.5

(a) $P(X=4) = \dfrac{\binom{20}{4}\binom{10}{3}}{\binom{30}{7}} = \dfrac{323}{1131}$

(b) $P(X=8) = 0$

(c) $$\begin{aligned} P(X < 3) &= \frac{\binom{20}{0}\binom{10}{7}}{\binom{30}{7}} + \frac{\binom{20}{1}\binom{10}{6}}{\binom{30}{7}} + \frac{\binom{20}{2}\binom{10}{5}}{\binom{30}{7}} \\ &= \frac{1}{39} \end{aligned}$$

Aufgabe 7.6

Poisson-Parameter für 30 Minuten: $\lambda = 18$

Poisson-Parameter für 10 Minuten: $\lambda = 6$

(a) $P(X=5) = \dfrac{\mathrm{e}^{-6} \cdot 6^5}{5!} = 0.1606$

(b) $P(X \leq 5) = \sum_{k=0}^{5} \dfrac{\mathrm{e}^{-6} \cdot 6^k}{k!} = 0.4457$

(c) $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 0.5543$

(d) $P(X=0) = \dfrac{\mathrm{e}^{-6} \cdot 6^0}{0!} = 0.002479$

Aufgabe 7.7

(a) $\mathrm{E}(X) = 1 \cdot \frac{3}{5} + 6 \cdot \frac{2}{5} = 3$

$\mathrm{E}(X^2) = 1 \cdot \frac{3}{5} + 36 \cdot \frac{2}{5} = 15$

$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = 15 - 9 = 6$

(b) $\mathrm{E}(Y) = 2 \cdot \frac{9}{25} + 7 \cdot \frac{12}{25} + 12 \cdot \frac{4}{25} = 6$

$\mathrm{E}(Y^2) = 4 \cdot \frac{9}{25} + 49 \cdot \frac{12}{25} + 144 \cdot \frac{4}{25} = 48$

$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}(Y)^2 = 48 - 36 = 12$

(c) $\mathrm{E}(Z) = 2 \cdot \frac{6}{20} + 7 \cdot \frac{12}{20} + 12 \cdot \frac{2}{20} = 6$

$\mathrm{E}(Z^2) = 4 \cdot \frac{6}{20} + 49 \cdot \frac{12}{20} + 144 \cdot \frac{2}{20} = 45$

$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{E}(Z^2) - \mathrm{E}(Z)^2 = 45 - 36 = 9$

Aufgabe 7.8

$\mathrm{E}(X) = 1 \cdot 0.6 + 0 \cdot 0.4 = 0.6$
$\mathrm{E}(X^2) = 1^2 \cdot 0.6 + 0^2 \cdot 0.4 = 0.6$
$\mathrm{Var}(X) = 0.6 - 0.6^2 = 0.24$

Aufgabe 7.9

X: Gesamtgewinn

- Frage 1 zuerst:

x	0	100	300
$p(X = x)$	0.2	$0.8 \cdot 0.5$	$0.8 \cdot 0.5$

$\mathrm{E}(X) = 0 \cdot 0.2 + 100 \cdot 0.4 + 300 \cdot 0.4 = 160$

- Frage 2 zuerst:

x	0	200	300
$p(X = x)$	0.5	$0.5 \cdot 0.2$	$0.5 \cdot 0.8$

$\mathrm{E}(X) = 0 \cdot 0.5 + 200 \cdot 0.1 + 300 \cdot 0.4 = 140$

Man sollte mit Frage 1 beginnen.

Aufgabe 7.10

- $c = 0.1$
- $$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= 0.5 \\ 1 \cdot 0.4 + a \cdot 0.2 + b \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.1 &= 0.5 \\ 0.2a + 0.3b &= 0.1 \\ a &= 0.5 - 1.5b \end{aligned}$$
- $\mathrm{E}(X^2) = 0.4 + 0.2a^2 + 0.3b^2$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= 1.25 \\ \mathrm{E}(X^2) - E(X)^2 &= 1.25 \\ 0.4 \cdot 1^2 + 0.2 \cdot a^2 + 0.3 \cdot b^2 + 0.1 \cdot 0^2 - 0.5^2 &= 1.25 \\ 0.2a^2 + 0.3b^2 &= 1.1 \\ 2a^2 + 3b^2 &= 11 \\ 2(0.5 - 1.5b)^2 + 3b^2 &= 11 \\ 4.5b^2 - 3b + 0.5 + 3b^2 &= 11 \\ 7.5b^2 - 3b - 10.5 &= 0 \\ b_1 &= -1 \\ b_2 &= 1.4 \end{aligned}$$

$a_1 = 0.5 - 1.5b_1 = 2$
$a_2 = 0.5 - 1.5b_2 = -1.6$

Aufgabe 7.11

(a) X: Gewinn in CHF

$X = x_i$	$p_i = P(X = x_i)$
20	$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$
2	$\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{8}{216}$
1	$\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{27}{216}$

(b) $E(X) = \dfrac{1}{216} \cdot 20 + \dfrac{8}{216} \cdot 2 + \dfrac{27}{216} \cdot 1 = \dfrac{7}{24}$

Das Spiel ist bei einem Einsatz von 0.2917 Franken fair.

Aufgabe 7.12

(a) $\mathrm{E}(X) = 0.2 \cdot (-2) + 0.1 \cdot 1 + 0.4 \cdot 2 + 0.3 \cdot 4 = 1.7$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \sum_x p_X(x)\big(x - \mathrm{E}(X)\big)^2 \\
&= 0.2 \cdot (-2 - 1.7)^2 + 0.1 \cdot (1 - 1.7)^2 + \dots \\
&= 4.41
\end{aligned}$$

Alternative: mit

$\mathrm{E}(X^2) = 0.2 \cdot 4 + 0.1 \cdot 1 + 0.4 \cdot 4 + 0.3 \cdot 16 = 7.3$

erhält man:

$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = 7.3 - 1.7^2 = 4.41$

und damit $\sigma(X) = 2.1$

(b) Analog wie bei (a) rechnen oder einfacher die Formel für eine *lineare* Funktion von Zufallsvariablen anwenden:

$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(2X + 1) = 2\mathrm{E}(X) + 1 = 2 \cdot 1.7 + 1 = 4.4$

Ebenso bei der Varianz: $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$

$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(2X + 1) = 2^2\mathrm{Var}(X) = 4 \cdot 4.41 = 17.64$

$\sigma(X) = \sqrt{2^2\mathrm{Var}(X)} = 2 \cdot 2.1 = 4.2$

(c) $\mathrm{E}(Z) = 7.3$

$\mathrm{Var}(Z) = \dots = 33.21;$

$\sigma(Z) = \dots = 5.763$

Aufgabe 7.13

Für eine geometrisch verteilte Zufallsvariable X gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} \quad \text{Indexverschiebung: } k \to k+1 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)p(1-p)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} kp(1-p)^k + \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k \\
&= 0 \cdot p(1-p)^0 + \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^k + \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} \\
&= (1-p)\sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} + 1 = (1-p)\mathrm{E}(X) + 1
\end{aligned}$$

Auflösen nach $\mathrm{E}(X)$ ergibt $\mathrm{E}(X) = 1/p$

Also: $\mathrm{E}(X) = 1/p = 1/(1/6) = 6$

Aufgabe 7.14

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= np & &= 8 \\
\mathrm{Var}(X) &= np(1-p) & &= 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8(1-p) &= 6 \\
(1-p) &= 3/4 \\
p &= 1/4 \\
n &= 32
\end{aligned}$$

Aufgabe 7.15

$\mathrm{E}(X) = \lambda = 10$ Pakete/Minute

$\mathrm{Var}(X) = \lambda = 10$ Pakete/Minute