Aufgabe 7.1

(a)

Ereignis ω	Erfolg x	$P(X=x)$
$(\overline{1},\overline{1})$	-1	$25/36$
$(1,\overline{1})$, $(\overline{1},1)$	2	$10/36$
$(1,1)$	4	$1/36$

(b) $\mathrm{E}(X) = (-1)\cdot\frac{25}{36} + 2\cdot\frac{10}{36} + 4\cdot\frac{1}{36} = -\frac{1}{36}$

Pro Spiel entsteht ein mittlerer Verlust von etwa CHF 0.0278 für den Spieler.

Aufgabe 7.2

x	ω	$P(X=x)$
0.–	ww	$\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{28}{45}$
1.–	rw, wr	$\frac{2}{10}\cdot\frac{8}{9}+\frac{8}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{16}{45}$
5.–	rr	$\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{45}$

Erwartungswert: $\mathrm{E}(x) = 0\cdot\frac{28}{45} + 1\cdot\frac{16}{45} + 5\cdot\frac{1}{45} = \frac{7}{15}$ Franken

Für ein faires Spiel sollte der Einsatz etwa 47 Rappen betragen.

Aufgabe 7.3

(a) $0.1+0.25+0.2+0.05+0.3+a=1 \quad\Rightarrow\quad a=0.1$

(b) $P(X\le 0) = P(X=-1)+P(X=0) = 0.1+0.25 = 0.35$

(c) $P(\sqrt{2}<X<\pi) = P(X=2)+P(X=3) = 0.2+0.05 = 0.25$

(d) $E(X) = 0.5\cdot(-1)+\cdots = 2.55$

(e) $$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \sum_x p_X(x)\cdot\big[x-\mathrm{E}(X)\big]^2\\ &= 0.5\cdot(-1-2.55)^2 + 0.25\cdot(0-2.55)^2+\ldots\\ &= 5.9475\end{aligned}$$

oder: $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2 = 12.45-2.55^2 = 5.9475$

(f)

$y=(x-1)^2$	4	1	1	4	5	6
$P(X=x)$	0.1	0.25	0.2	0.05	0.3	0.1

Anschliessend Kolonnen mit gleichem y_i zusammenfassen:

y	1	4	16	25
$P(Y=y)$	0.45	0.15	0.3	0.1

Aufgabe 7.4

X: Anzahl Briefe, die am nächsten Tag zugestellt werden (Anzahl „Erfolge“).

X ist binomialverteilt mit $p = 0.9$

(a) $P(X = 8) = \binom{8}{8} 0.9^8 \cdot 0.1^0 = 0.4305$

(b) $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \sum_{x=1}^{5} P(X = x) = 0.9619$

Aufgabe 7.5

(a) $\mathrm{E}(X) = 12 \cdot 0.4 = 4.8$
$\mathrm{Var}(X) = 12 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 2.88$
$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = 1.697$

(b) $\mathrm{E}(X) = 125 \cdot 0.2 = 25$
$\mathrm{Var}(X) = 125 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 20$
$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = 4.472$

(c) $\mathrm{E}(X) = 37\,400 \cdot 0.95 = 35\,530$
$\mathrm{Var}(X) = 37\,400 \cdot 0.95 \cdot 0.05 = 1776.5$
$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = 42.148$

Aufgabe 7.6

$\mu = n \cdot p$ und $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p) = \mu \cdot (1 - p)$

$\Rightarrow \quad (1 - p) = \sigma^2/\mu \quad \Rightarrow \quad p = 1 - \sigma^2/\mu \quad \Rightarrow \quad n = \mu/p$

(a) $p = 1 - 2^2/5 = 0.2$, $n = 5/0.2 = 25$

(b) $p = 1 - 7.5^2/225 = 0.75$, $n = 225/0.75 = 300$

(c) $p = 1 - 2.88/7.2 = 0.6$, $n = 7.6/0.6 = 12$

Aufgabe 7.7

X: Anzahl der roten Kugeln

X ist hypergeometrisch verteilt mit $n = 2$, $m = 7$, $r = 4$

x (Anzahl gezogene rote Kugeln)	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

(a) $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{7} \cdot 0 + \frac{4}{7} \cdot 1 + \frac{2}{7} \cdot 2 = \frac{8}{7}$

(b) $\operatorname{Var}(X) = \frac{1}{7} \cdot \left(0 - \frac{8}{7}\right)^2 + \frac{4}{7} \cdot \left(1 - \frac{8}{7}\right)^2 + \frac{2}{7} \cdot \left(2 - \frac{8}{7}\right)^2 = \frac{20}{49}$

(c) $\sigma(X) = \sqrt{\frac{20}{49}} = \frac{2\sqrt{5}}{7}$

alternative Lösung: $m = 7$, $r = 4$ und $n = 2$ in die Ausdrücke

$$\mathrm{E}(X) = n \cdot \frac{r}{m} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Var}(X) = n \cdot \frac{r}{m} \cdot \left(1 - \frac{r}{m}\right) \cdot \frac{m-n}{m-1}$$

aus der Formelsammlung [FTB, S. 122] einsetzen.

Aufgabe 7.8

X: Nummer des Wurfs, bei dem zum ersten Mal die Zahl 1 oben erscheint.

X ist geometrisch verteilt mit $p = 1/12$

(a) $P(X = 7) = (1-p)^6 p = \left(\frac{11}{12}\right)^6 \cdot \frac{1}{12} = 0.04944$

(b) $$1 - P(X \leq 4) = 1 - \left[\frac{1}{12} + \frac{11}{12} \cdot \frac{1}{12} + \left(\frac{11}{12}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} + \left(\frac{11}{12}\right)^3 \cdot \frac{1}{12}\right]$$
$$\stackrel{*}{=} 1 - \frac{1}{12} \cdot \frac{1 - (11/12)^4}{1 - 11/12} = 0.7061$$

* Summenformel für die geometrische Reihe (FTB, S. 40)

(c) $\mathrm{E}(X) = 1/p = 1/(1/12) = 12$

Aufgabe 7.9

Poisson-Parameter: $\lambda = 1/2$
X: Anzahl der Fehler pro Seite

(a) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{0.5^0}{0!} \cdot \mathrm{e}^{-0.5} = 0.3935$

(b) $\mathrm{E}(X) = \lambda = 0.5$
Das Resultat sollte klar sein. Man findet es aber auch in der PAM-Formelsammlung auf Seite 123.

(c) $\sigma(X) = \sqrt{\operatorname{Var}(X)} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{0.5}$ (FTB S. 123)