Aufgabe 6.1

$6^5 = 7776$

Aufgabe 6.2

je einen Australier und eine Beligierin:	60 Möglichkeiten
je eine Belgierin und einen Chinesen:	72 Möglichkeiten
je einen Chinesen und einen Australier:	30 Möglichkeiten
Insgesamt (Summenregel)	162 Möglichkeiten

Aufgabe 6.3

Wir verteilen die Farben von links nach rechts:

- Links: eine von 6 Farben
- Mitte: eine von 5 Farben, denn zwei nebeneinander liegende Streifen dürfen nicht dieselbe Farbe haben.
- Rechts: eine von 5 Farben, denn die Farbe vom mittleren Feld darf nicht wieder verwendet werden; hingegen ist die Farbe vom Feld links wieder erlaubt.

Produktregel: $6 \cdot 5 \cdot 5 = 150$ Möglichkeiten.

Aufgabe 6.4

Einer der 12 Spieler spielt gegen einen von 11 Gegnern.

$\Rightarrow$ 11 Möglichkeiten für die erste Paarung.

Einer der übrigen 10 Spieler spielt gegen einen von 9 Gegnern.

$\Rightarrow$ 9 Möglichkeiten für die zweite Paarung.

...

Einer der übrigen 4 Spieler spielt gegen einen von 3 Gegnern.

$\Rightarrow$ 3 Möglichkeiten für die fünfte Paarung.

Es bleiben noch zwei Spieler und somit eine Paarung übrig.

Produktregel: $11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 10\,395$ Paarungen

Aufgabe 6.5

(a) $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

(b) 4

(c) $(12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7)/6! = 924$

(d) $2^7 = 128$

Aufgabe 6.6

$7! = 5040$

Aufgabe 6.7

(a) Auf wie viele Arten geht dies, wenn alle Bücher verschieden sind?

$(5 + 3 + 7)! = 15! = 1.308 \cdot 10^{13}$

(b) Auf wie viele Arten geht dies, wenn alle Bücher der gleichen Art nebeneinander stehen sollen?

$5! \cdot 3! \cdot 7! \cdot 3! = 21\,772\,800$

Aufgabe 6.8

$8!/(2! \cdot 2!) = 10\,080$

Aufgabe 6.9

(a) $10! = 3\,628\,800$

(b) $5! \cdot 5! = 14\,400$

(c) Für die 5 Paare als Ganzes gibt es 5! Möglichkeiten, das Drehkreuz zu passieren.

Bei jedem Paar gibt es, unabhängig von jedem anderen Paar $2! = 2$ Reihenfolgen (Frau oder Mann zuerst).

Produkteregel: $5! \cdot (2!)^5 = 3\,840$ Möglichkeiten

Aufgabe 6.10

$7!/(4! \cdot 2!) = 105$

Aufgabe 6.11

(a) 10^6 Möglichkeiten

(b) $10^6 \cdot 5 : 60 : 60 : 24 \approx 58$ Tage

Aufgabe 6.12

Für die 1. Murmel hat er 2 Unterbringungsmöglichkeiten

Für die 2. Murmel hat er 2 Unterbringungsmöglichkeiten

...

Für die 8. Murmel hat er 2 Unterbringungsmöglichkeiten

Produktregel: $2^8 = 256$ Möglichkeiten

alternative Lösung als Auswahlproblem:

Aus den 8 Kugeln werden die Murmeln ausgewählt, die in die, sagen wir, linke Tasche kommen. Die Murmeln der rechten Tasche sind dadurch eindeutig bestimmt.

$$\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7}$$

$$= 1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1$$

$$= 256$$

Aufgabe 6.13

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ (n-elementige Menge)

Menge aller Teilmengen von A (Potenzmenge)

$\mathcal{P}(A) = \{T \colon T \subset A\}$

$B = \big\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \colon x_i \in \{0, 1\}\big\}$

Ordne jeder Teilmenge $T \in \mathcal{P}(A)$ wie folgt ein n-Tupel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ zu:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn } a_i \in T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Abbildung ist bijektiv – zu jedem n-Tupel in B gibt es genau eine Teilmenge $T \in \mathcal{P}(A)$ und umgekehrt.

Wegen $|\mathcal{P}(A)| = |B|$ und $|B| = 2^n$ gilt $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$

Aufgabe 6.14

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 10!/3! = 604\,800$

Aufgabe 6.15

(a) $12!/(12-5)! = 95\,040$

(b) $12!/(12-11)! = 479\,001\,600$

(c) $12! = 479\,001\,600$

Aufgabe 6.16

(a) $\binom{143}{143} = \frac{143!}{143! \cdot (143-143)!} = \frac{143!}{143! \cdot 0!} = \frac{143!}{143!} = 1$

(b) $\binom{17}{16} = \frac{17!}{16! \cdot (17-16)!} = \frac{17!}{16! \cdot 1!} = \frac{17!}{16!} = 17$

(c) $\binom{101}{99} = \binom{101}{2} = \frac{101 \cdot 100}{2 \cdot 1} = 101 \cdot 50 = 5050$

Aufgabe 6.17

Kombinationen ohne Wiederholung: $\binom{11}{4} = 330$

Aufgabe 6.18

Zuerst wählt man 4 Personen für den ersten Tisch aus. Damit sind automatisch auch die Personen bestimmt, die am zweiten Tisch Platz nehmen müssen. Insgesamt:

$\binom{7}{4} = 35$

Aufgabe 6.19

$\binom{10}{6} \cdot \binom{5}{3} = 2100$

Aufgabe 6.20

(a) Eine Gerade ist durch zwei Punkte definiert. Die (maximale) Anzahl der Geraden entspricht daher der Anzahl Möglichkeiten, zwei Punkte aus 45 Punkten auszuwählen:

$\binom{45}{2} = 990$

(Wenn jeweils mehr als zwei Punkte auf einer Geraden liegen, dann gibt es natürlich weniger Fälle)

(b) Ein Kreis ist durch drei Punkte definiert. Die (maximale) Anzahl der Kreise entspricht daher der Anzahl Möglichkeiten, drei Punkte aus 45 Punkten auszuwählen:

$\binom{45}{3} = 14\,190$

Aufgabe 6.21

(a) Wie oft geht man z. B. nach rechts?

$$\binom{16}{8} = 12\,870$$

(b) $\binom{7}{3} \cdot \binom{9}{5} = 4410$

Aufgabe 6.22

Es gibt zwei richtige Resultate:

- Für das 1. Team wählt man 5 aus 10 Personen aus:

  $$\binom{10}{5} = 252.$$

  Damit sind die übrigen 5 Personen im zweiten Team

  Wenn wir also zwischen einer ersten und einer zweiten Mannschaft unterscheiden, dann ergibt es 252 Möglichkeiten.

- Wenn wir nicht zwischen einer ersten und einer zweiten Mannschaft unterscheiden, so wurde oben jede Aufteilung doppelt gezählt; also gibt es in diesem Fall nur 126 Möglichkeiten.

Aufgabe 6.23

$$\begin{aligned}
\binom{x}{2} &= 190 \\
\frac{x \cdot (x-1)}{1 \cdot 2} &= 190 \\
x^2 - x &= 380 \\
x^2 - x - 380 &= 0 \\
x &= 20 \\
x &= -19 \quad \text{Unsinn}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.24

Zuerst jedem Kind je ein Tafel geben, erst dann die restlichen 9 Tafeln verteilen:

$$1 \cdot \binom{9+2}{2} = 55$$

Aufgabe 6.25

Die gesamte Torzahl jeder Mannschaft wird durch die zwei Pausen in drei Torgruppen aufgeteilt. Zum Beispiel so:

Heimmannschaft:	`TT|TTT|TTT`
Gäste:	`TTT||TT`

Da jedes Ergebnis der einen Mannschaft mit jedem Ergebnis der Anderen Mannschaft „kombiniert“ werden kann, erhalten wir folgende Anzahl möglicher Zwischenresultate:

$$\binom{8+2}{2} \cdot \binom{5+2}{2} = 945$$

Aufgabe 6.26

Es handelt sich um Kombinationen mit Wiederholungen (theoretisch wäre auch ein Einparteiensystem möglich).

$$\binom{54+3}{3} = 29\,260$$

Aufgabe 6.27

Jede der 37 Ecken kann mit $37 - 3 = 34$ anderen Ecken verbunden werden, denn die Ecke selbst und ihre beiden Nachbarn kommen als Diagonalendpunkte nicht in Frage. Dabei wird jede Diagonale doppelt gezählt. Also gibt es $37 \cdot 34/2 = 629$ Diagonalen.

Eine andere Lösung ist die: Man bestimmt zunächst alle möglichen Verbindungssstrecken zwischen den 37 Punkten:

$$\binom{37}{2} = 666.$$

Darunter sind auch die Strecken benachbarter Punkte, welche gerade die 37 Seiten des 37-Ecks sind. Also $666 - 37 = 629$ Diagonalen.

Allgemein: $\dfrac{n(n-3)}{2}$ oder $\dbinom{n}{2} - n$

Aufgabe 6.28

Additive Lösung:

$$\binom{10}{1} \cdot \binom{8}{3} + \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} + \binom{10}{3} \cdot \binom{8}{1} = 560 + 1260 + 960 = 2780$$

Subtraktive Lösung:

$$\binom{18}{4} - \binom{10}{0} \cdot \binom{8}{4} - \binom{10}{4} \cdot \binom{8}{0} = 3060 - 70 - 210 = 2780$$

Aufgabe 6.29

(a) Auf $15! \approx 1.31 \cdot 10^{12}$ Arten

Wegen der Nummern spielen die Farben hier keine Rolle.

(b) André, Brigitte und Christian: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 5!/2! = 60$

Die restlichen 12 Schüler: 12! Möglichkeiten

Produktregel: $60 \cdot 12! = 28\,740\,096\,000$ Möglichkeiten.

Aufgabe 6.30

(a) Zuerst werden 6 Schüler für die roten T-Shirts ausgewählt, dann 5 Schüler für die blauen T-Shirts und die übrigen bekommen die gelben:

$$\binom{15}{6} \cdot \binom{9}{5} \cdot \binom{4}{4} = 630\,630$$

oder mit Multinomialkoeffizient: $\dfrac{15!}{6! \cdot 5! \cdot 4!} = 630\,630$

(b) André, Brigitte und Christian erhalten blaue T-Shirts und da diese nicht unterscheidbar sind, geht dies auf genau eine Weise. Die übrigen 12 Schüler erhalten noch 6 rote, 2 blaue und und 4 gelbe T-Shirts:

$$\binom{12}{6} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{4} = 13\,860$$

oder mit Multinomialkoeffizient: $\dfrac{12!}{6! \cdot 2! \cdot 4!} = 13\,860$

Aufgabe 6.31

Häufigkeiten der Buchstaben:

A	N	T	E	R
3	1	3	4	2

Permutationen mit Wiederholungen: $\dfrac{13!}{3! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 2!} = 3\,603\,600$

Aufgabe 6.32

(a) Die Schokolade muss zweimal gebrochen werden:

$$\binom{5}{2} = 10 \text{ Möglichkeiten}$$

(b) Die Schokolade muss dreimal gebrochen werden:

$$\binom{5}{3} = 10 \text{ Möglichkeiten}$$

(c) Die Schokolade muss 1–5 mal gebrochen werden:

$$\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}=31 \text{ Möglichkeiten}$$

subtraktive Lösung: $2^5-\binom{5}{0}=32-1=31$

Aufgabe 6.33

Die gleichzeitige Ankunft ist unwesentlich; wir können die Autos auch nacheinander ankommen und so die Parkplätze wählen lassen. Es handelt sich jeweils um Variationen ohne Wiederholungen.

(a) $6\cdot 5\cdot 4=120$

(b) $6!=720$

(c) $8\cdot 7\cdot\ldots\cdot 4\cdot 3=20\,160$

Aufgabe 6.34

(a) Produktregel:

$$\binom{36}{9}\cdot\binom{27}{9}\cdot\binom{18}{9}\approx 2.15\cdot 10^{19} \text{ Möglichkeiten.}$$

(b) Es sind weniger, denn wie bei (a) berechnen wir:

$$\binom{36}{12}\cdot\binom{24}{12}\cdot\binom{12}{12}\approx 3.385\cdot 10^{15}$$

(c) Hat A vier Nell und D vier Bauern, so sind noch 28 Karten zu verteilen. Produktregel:

$$\binom{28}{5}\cdot\binom{23}{9}\cdot\binom{14}{9}\approx 1.61\cdot 10^{14} \text{ Möglichkeiten.}$$

Aufgabe 6.35

Fahrerin:	$2!=2$ Sitzverteilungen
übrige Mitfahrende:	$4!=24$ Sitzverteilungen
Insgesamt	$2\cdot 4!=48$ Sitzverteilungen

Aufgabe 6.36

(a) Aus 12 Fragen 8 auswählen: $\binom{12}{8}=495$

(b) Aus den ersten 4 Fragen 4 wählen und aus den verbleibenden 8 Fragen weitere 4 wählen: $\binom{4}{4}\cdot\binom{8}{4}=70$

(c) Aus den ersten 7 Fragen 4 wählen und aus den verbleibenden 5 Fragen weitere 4 wählen: $\binom{7}{4} \cdot \binom{5}{4} = 175$

(d) Genau 4 der ersten 7 Fragen beantworten: $\binom{7}{4} \cdot \binom{5}{4} = 175$

Genau 5 der ersten 7 Fragen beantworten: $\binom{7}{5} \cdot \binom{5}{3} = 210$

Genau 6 der ersten 7 Fragen beantworten: $\binom{7}{6} \cdot \binom{5}{2} = 70$

Genau 7 der ersten 7 Fragen beantworten: $\binom{7}{7} \cdot \binom{5}{1} = 5$

Mit der Summenregel ergibt das 460 Möglichkeiten

Aufgabe 6.37

(a) Jedem Skifahrer ordnen wir eine der Gondelnummern 1, 2 oder 3 zu. Das ergibt 3^{17} Möglichkeiten.

(b) Anzahl Verteilungen 1. Gondel: $\binom{17}{6} = 12\,376$

Anzahl Verteilungen 2. Gondel: $\binom{11}{4} = 4 = 330$

Anzahl Verteilungen 3. Gondel: $\binom{7}{7} = 1$

Produktregel: 4 084 080 Verteilungen.

(c)

N. und R. in der 1. Gondel:	$\binom{15}{4} \cdot \binom{11}{4} \cdot \binom{7}{7}$	450 450
N. und R. in der 2. Gondel:	$\binom{15}{6} \cdot \binom{9}{2} \cdot \binom{7}{7}$	180 180
N. und R. in der 3. Gondel:	$\binom{15}{6} \cdot \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{5}$	630 630
Insgesamt		1 261 260