## Aufgabe 5.1

- $P(A) = P(\{(1,1),(1,3),\ldots,(6,4),(6,6)\}) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$
- $P(B) = P(\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),\ldots,(5,5)\}) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$
- $P(A \cap B) = P(\{(1,1),(1,3),\ldots,(5,5)\}) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

$A$ und $B$ sind (stochastisch) abhängig.

## Aufgabe 5.2

- $P(A) = P(\{(1,1),(1,3),\ldots,(6,4),(6,6)\}) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$
- $P(B) = P(\{(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)\}) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$
- $P(A \cap B) = P(\{(2,6),(6,2)\}) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$A$ und $B$ sind (stochastisch) unabhängig.

## Aufgabe 5.3

- $P(\text{Augensumme} = i) = \dfrac{i-1}{36} \quad (2 \leq i \leq 12)$

  $P(A) = \dfrac{1+2+3+4+5+6}{36} = \dfrac{21}{36} = \dfrac{7}{12}$
- $P(B) = P(\{(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)\}) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$
- $P(A \cap B) = P(\{(3,4),(4,3)\}) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

$A$ und $B$ sind (stochastisch) abhängig.

### Aufgabe 5.4

Mit $X$ bezeichnen wir die Anzahl „Zahl“ bei $n = 12$ Würfen mit einer fairen Münze. Die Wahrscheinlichkeit bei *einem* Münzwurf „Zahl“ zu würfeln, beträgt bei einem idealen Würfel $p = 0.5$; entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit für „Wappen“ $1 - p = 0.5$.

(a) $P(X = 0) = \binom{12}{0} \cdot 0.5^0 \cdot 0.5^{12} = 2.44 \cdot 10^{-4}$

(b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0.9998$

(c) $P(X = 12) = \binom{12}{12} \cdot 0.5^{12} \cdot 0.5^0 = 2.44 \cdot 10^{-4}$ (da $p = 1 - p$)

(d) $P(X = 2) = \binom{12}{2} \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^{10} = 0.0161$

(e) $P(X = 11) = \binom{12}{11} \cdot 0.5^{11} \cdot 0.5^1 = 0.00293$

(f) $P(X \geq 11) = \sum_{k=11}^{12} \binom{12}{k} \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{12-k} = 0.00317$

(g) $P(X \leq 6) = \sum_{k=0}^{6} \binom{12}{k} \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{12-k} = 0.613$

(h) $P(4 \leq X \leq 9) = \sum_{k=4}^{9} \binom{12}{k} \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{12-k}$

$$= \sum_{k=0}^{9} \binom{12}{k} \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{12-k} - \sum_{k=0}^{3} \binom{12}{k} \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{12-k}$$

$= 0.908$

### Aufgabe 5.5

$X$: Anzahl der gezogenen roten Kugeln

$$P_8(4 \leq X \leq 6) = \sum_{k=4}^{6} \binom{8}{k} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} = 0.7170$$

TI-84+: `sum(binompdf(8,2/3,{4,5,6}))`

oder `binomcdf(8,2/3,6)−binomcdf(8,2/3,3)`

**Aufgabe 5.6**

$X$: Anzahl richtiger Antworten bei $n = 5$ Prüfungsfragen
$p = P(\textit{eine}$ Frage richtig zu beantworten$) = 1/3$

(a) $P(X = 0) = \binom{5}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243} = 0.132$

(b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = \frac{211}{243} = 0.868$

(c) $P(X = 5) = \binom{5}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{243} = 0.00412$

(d) $$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{11}{243} = 0.0453 \end{aligned}$$

**Aufgabe 5.7**

$X$: Anzahl Reissnägel in Seitenlage

$$\begin{aligned} P_{10}(X > 3) &= 1 - P_{10}(X \leq 3) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{3} \binom{10}{k} \cdot 0.4^k \cdot 0.6^{10-k} = 0.6177 \end{aligned}$$

TI-83+/TI-84+: 1−binomcdf(10,0.4,3)

**Aufgabe 5.8**

$X$: Anzahl Einladungen die am nächsten Tag zugestellt werden
$X$ ist binomialverteilt mit $p = 0.9$

(a) $P(X = 8) = \binom{8}{8} 0.9^8 \cdot 0.1^0 = 0.4305$

(b) $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \sum_{x=1}^{5} P(X = x) = 0.9619$

**Aufgabe 5.9**

$X$: Anzahl Personen mit der bestimmten Eigenschaft

$$
\begin{aligned}
P_n(X \geq 1) &\geq 0.9 \\
1 - P_n(X = 0) &\geq 0.9 \\
1 - 0.95^n &\geq 0.9 \\
0.1 &\geq 0.95^n \\
\ln 0.1 &\geq n \cdot \ln 0.95 \\
\ln 0.1 / \ln 0.95 &\leq n \\
44.89 &\leq n
\end{aligned}
$$

**Aufgabe 5.10**

$$
\begin{aligned}
P(\text{Mindestens eine von } n \text{ Komponenten funktioniert}) &\geq 0.99 \\
1 - P(\text{Alle } n \text{ Komponenten versagen}) &\geq 0.99 \\
1 - 0.65n &\geq 0.99 \\
0.01 &\geq 0.65n \\
\ln 0.01 &\geq n \cdot \ln 0.65 \\
\ln 0.01 / \ln 0.65 &\leq n \\
10.69 &\leq n
\end{aligned}
$$

Mindestens 11 Komponenten müssen parallel geschaltet werden.

**Aufgabe 5.11**

Die Münze wird zweimal nacheinander geworfen und die Entscheidung gemäss folgendem Aktionsplan gefällt:

| 1. Wurf | 2. Wurf | Aktion |
|---|---|---|
| Wappen | Zahl | wähle Kino und beende den Versuch |
| Zahl | Wappen | wähle Theater und beende den Versuch |
| Zahl | Zahl | wiederhole den Versuch |
| Wappen | Wappen | wiederhole den Versuch |

Beweis:

$A_k$: Ereignis, dass im $k$-ten Versuch eine Entscheidung gefällt wird.

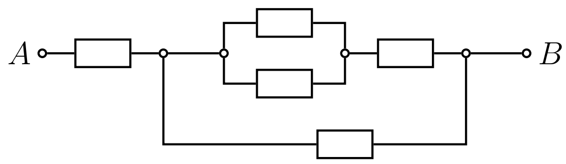
- $P(\text{Kino}|A_k) = \dfrac{p(1-p)}{2p(1-p)} = \dfrac{1}{2}$
- $P(\text{Theater}|A_k) = \dfrac{(1-p)p}{2p(1-p)} = \dfrac{1}{2}$

und es gilt:

$$
\begin{aligned}
P(\text{Kino}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{Kino}|A_k)P(A_k) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot P(A_k) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} P(A_k) = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

da $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_k) = 1$, wenn $P(\text{Wappen}) > 0$ und $P(\text{Zahl}) > 0$.

**Aufgabe 5.12**




- innere Parallelschaltung:

  $p_1 = 1 - (1-p)^2 = 1 - (1 - 2p + p^2) = 2p - p^2$

- innere Serieschaltung:

  $p_2 = p_1 \cdot p = 2p^2 - p^3$

- äussere Parallelschaltung:

  $$\begin{aligned} p_3 &= 1 - (1-p_2)(1-p) = 1 - (1 - p - p_2 + pp_2) \\ &= p + p_2 - pp_2 = p + 2p^2 - p^3 - (2p^3 - p^4) \\ &= p + 2p^2 - 3p^3 + p^4 \end{aligned}$$

- äussere Serieschaltung (Gesamtsystem):

  $p_4 = p \cdot p3 = p(p + 2p^2 - 3p^3 + p^4) = p^2 + 2p^3 - 3p^4 + p^5$

**Aufgabe 5.13**

(a) $P(A) = 0.99^8 = 0.923$

(b) $P(B) = 0.99^6 \cdot 0.01^2 = 9.41 \cdot 10^{-5}$

(c) $P(C) = \binom{8}{5} \cdot 0.99^5 \cdot 0.01^3 = 5.33 \cdot 10^{-5}$

(d) $P(D) = \sum_{k=7}^{8} = \binom{8}{k} \cdot 0.99^k \cdot 0.01^{8-k} = 0.997$

(e) $P(\text{Sequenz wird richtig übertragen}) = 0.99^8 = 0.923$

$X$: Anzahl richtig übertragener Sequenzen

$$P_{24}(X \geq 20) = \sum_{k=20}^{24} = \binom{24}{k} \cdot 0.923^k \cdot 0.077^{24-k} = 0.966$$