Aufgabe 5.1

$E_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $E_3 = \{3, 6, 9, 12\}$, $E_4 = \{4, 8, 12\}$

$$\left.\begin{array}{l} P(E_2 \cap E_3) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \\ P(E_2) \cdot P(E_3) = \frac{6}{12} \cdot \frac{4}{12} = \frac{1}{6} \end{array}\right\} E_2 \text{ und } E_3 \text{ sind unabhängig.}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(E_3 \cap E_4) = \frac{1}{12} \\ P(E_3) \cdot P(E_4) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{1}{12} \end{array}\right\} E_3 \text{ und } E_4 \text{ sind unabhängig.}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(E_4 \cap E_2) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \\ P(E_4) \cdot P(E_2) = \frac{3}{12} \cdot \frac{6}{12} = \frac{1}{8} \end{array}\right\} E_2 \text{ und } E_4 \text{ sind } \textit{nicht} \text{ unabhängig.}$$

Aufgabe 5.2

Es müssen alle Durchschnitte von jeweils 2 und 3 Ereignissen in ein Produkt der Einzelereignisse „faktorisiert“ werden können.

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) \\ P(B \cap C) &= P(B) \cdot P(C) \\ P(C \cap A) &= P(C) \cdot P(A) \\ P(A \cap B \cap C) &= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \end{aligned}$$

Aufgabe 5.3

Ein dichotomes Zufallsexperiment mit der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{3}{5}$ wird 7-mal wiederholt.

Hinweis: X bezeichnet die Anzahl der Erfolge.

Aufgabe 5.3 (a)

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, nie Erfolg zu haben?

$$P_7(X = 0) = \left(\frac{2}{5}\right)^7 = 0.00164$$

Aufgabe 5.3 (b)

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, genau einmal Erfolg zu haben?

$$P_7(X = 1) = 7 \cdot \frac{3}{5} \left(\frac{2}{5}\right)^6 = 0.0172$$

Aufgabe 5.3 (c)

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens einmal Erfolg zu haben?

$P_7(X \geq 1) = 1 - P_7(X = 0) = 0.998$

Aufgabe 5.3 (d)

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, genau 4-mal Erfolg zu haben?

$P_7(X = 4) = \binom{7}{4} \left(\frac{3}{5}\right)^4 \left(\frac{2}{5}\right)^3 = 0.29$

Aufgabe 5.3 (e)

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, höchstens 2-mal Erfolg zu haben?

$$\begin{aligned} &P_7(X \leq 2) \\ &= \left(\frac{2}{5}\right)^7 + 7 \cdot \frac{3}{5} \left(\frac{2}{5}\right)^6 + \binom{7}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^5 \\ &= 0.0963 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.3 (f)

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens 3-mal und höchstens 5-mal Erfolg zu haben?

$$\begin{aligned} &P_7(3 \leq X \leq 5) \\ &= \binom{7}{3} \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^4 + \binom{7}{4} \left(\frac{3}{5}\right)^4 \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \binom{7}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^5 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \\ &= 0.745 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.3 (g)

Wie oft muss das Experiment mindestens wiederholt werden, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.9999% mindestens einmal Erfolg hat?

$$\begin{aligned}
P_n(X \geq 1) &\geq 0.9999 \\
1 - P_n(X = 0) &\geq 0.9999 \qquad \text{(aufs Gegenereignis ausweichen)} \\
1 - (2/5)^n &\geq 0.9999 \\
0.0001 &\geq (2/5)^n \quad || \lg \\
\lg 0.0001 &\geq n \cdot \lg(2/5) \quad || : \lg(2/5) < 0 \quad !!! \\
\frac{\lg 0.0001}{\lg(2/5)} &\leq n \\
10.052 &\leq n
\end{aligned}$$

Es sind mindestens 11 Versuche nötig.

Aufgabe 5.4

X: Anzahl richtig beantworteter Fragen

$P_1(X = 1) = 1/3$

$$P_{20}(X \leq 10) = \sum_{k=0}^{10} \binom{20}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{20-k} = 0.9624$$

TI-84+: `binomcdf(20,1/3,10)`

Lösung über die falsch gelösten Aufgaben:

Die Formulierung

> „Der Test gilt als nicht bestanden, wenn nicht mehr als 10 Fragen richtig beantwortet wurden.“

bedeutet, dass man durchfällt, wenn man 0, 1, 2, …9, 10 Fragen richtig gelöst hat. Dies ist gleichbedeutend damit, dass man 10, 11, 12, …, 19, 20 Fragen *falsch* gelöst hat.

Also:

$$\begin{aligned}
P(\text{nicht bestanden}) &= \sum_{k=10}^{20} \binom{20}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{20-k} \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{9} \binom{20}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{20-k} \\
&= 0.9624
\end{aligned}$$

TI-84+: `1-binomcdf(20,2/3,9)`

Aufgabe 5.5

- innere Parallelschaltung: $p_1 = 1 - (1 - 0.6) \cdot (1 - 0.5) = 1 - 0.4 \cdot 0.5 = 0.8$
- obere Serieschaltung: $p_2 = 0.9 \cdot p_1 \cdot 0.9 = 0.648$

- untere Serieschaltung: $p_3 = 0.8 \cdot 0.7 = 0.56$
- äussere Parallelschaltung: $p_4 = 1-(1-p_2)(1-p_3) = 1-(1-0.648)(1-0.56) = 0.845$