Aufgabe 3.1

(a) A: zwei gleiche Augenzahlen

(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(b) A: zwei gleiche Augenzahlen

B: Die Summe der Augenzahlen ≤ 4

(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/36}{6/36} = 1/3$$

(c) C: Mindestens ein Würfel zeigt die Augenzahl 6.

(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)

$$P(C) = \frac{11}{36}$$

(d) C: Mindestens ein Würfel zeigt die Augenzahl 6.

D: Die Augenzahlen sind verschieden.

(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)

$$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{10/36}{30/36} = \frac{1}{3}$$

Aufgabe 3.2

F:	Max besucht das Freibad	S:	Sonne scheint
B:	Max spielt Beachvolleyball	$\overline{B}$:	Sonne scheint nicht
K:	Max geht ins Kino		
L:	Max lernt für die Prüfung		

(a) $P(F) = P(S) \cdot P(F|S) = 0.7 \cdot 0.6 = 0.42$

(b) $P(B) = P(S) \cdot P(B|S) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$

(c) $P(K) = P(\overline{S}) \cdot P(K|\overline{S}) = 0.3 \cdot 0.8 = 0.24$

(d) $P(L) = P(\overline{S}) \cdot P(L|\overline{S}) = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06$

Aufgabe 3.3

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B \mid C) &\overset{(B)}{=} \frac{P((A \cup B) \cap C)}{P(C)} \overset{(D)}{=} \frac{P((A \cap C) \cup (B \cap C))}{P(C)} \\
&\overset{(3)}{=} \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C)}{P(C)} \\
&= \frac{P(A \cap C)}{P(C)} + \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \\
&\overset{(B)}{=} P(A|C) + P(B|C)
\end{aligned}
$$

(B) Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit

(D) Distributivgesetz von $\cap$ über $\cup$

(3) 3. Axiom von Kolmogoroff (A und B sind disjunkt)

Aufgabe 3.4

D: der Artikel ist defekt

$D\bar{D}\bar{D}\bar{D}$ $\bar{D}D\bar{D}\bar{D}$ $\bar{D}\bar{D}D\bar{D}$ $\bar{D}\bar{D}\bar{D}D$
$DD\bar{D}\bar{D}$ $D\bar{D}D\bar{D}$ $D\bar{D}\bar{D}D$ $\bar{D}DD\bar{D}$ $\bar{D}D\bar{D}D$ $\bar{D}\bar{D}DD$
$DDD\bar{D}$ $DD\bar{D}D$ $D\bar{D}DD$ $\bar{D}DDD$
$DDDD$

$$P(\text{genau } 1\ D) = 4 \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{95}{99} \cdot \frac{94}{98} \cdot \frac{93}{97} = \frac{16\,609\,800}{94\,109\,400}$$

$$P(\text{genau } 2\ D) = 6 \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} \cdot \frac{95}{98} \cdot \frac{94}{97} = \frac{1\,071\,600}{94\,109\,400}$$

$$P(\text{genau } 3\ D) = 4 \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} \cdot \frac{3}{98} \cdot \frac{95}{97} = \frac{22\,800}{94\,109\,400}$$

$$P(\text{genau } 4\ D) = 1 \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} \cdot \frac{3}{98} \cdot \frac{2}{97} = \frac{120}{94\,109\,400}$$

$$P(\text{mind. ein Artikel ist defekt}) = \frac{17\,704\,320}{94\,109\,400} = \frac{147\,536}{784\,245} \approx 0.188$$

einfacher via Gegenereignis:

$$\begin{aligned} P(\text{mind. ein Artikel defekt}) &= 1 - P(\text{kein Artikel defekt}) \\ &= 1 - P(\bar{D}\bar{D}\bar{D}\bar{D}) \\ &= 1 - \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{93}{98} \cdot \frac{92}{97} \approx 0.188 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.5

$$\begin{aligned} P(A \cap B|B) &\overset{(B)}{=} \frac{P((A \cap B) \cap B)}{P(B)} \overset{(A)}{=} \frac{P(A \cap (B \cap B))}{P(B)} \\ &\overset{(I)}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \overset{(B)}{=} P(A|B) \end{aligned}$$

(B) Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit

(A) Assoziativgesetz für $\cap$

(I) Idempotenz der Mengenoperationen $\cap$ und $\cup$

Aufgabe 3.6

♀ ♀ ♀ ♀ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂

□□□□ □□□□ □□□□ □□□□

$$\begin{aligned} P(A_4) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

$P(A_1) = \frac{16}{16}$ (alle Möglichkeiten für Schülerin 1)

$P(A_2|A_1) = \frac{12}{15}$ (12 von 15 Plätzen für Schülerin 2)

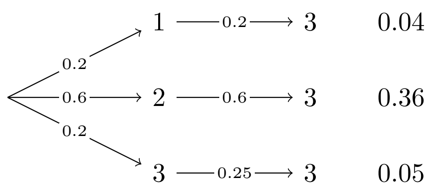
$P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{8}{14}$ (8 von 14 Plätzen für Schülerin 3)

$P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{4}{13}$ (4 von 13 Plätzen für Schülerin 4)

$$P(A_4) = \frac{16}{16} \cdot \frac{12}{15} \cdot \frac{8}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{64}{455}$$

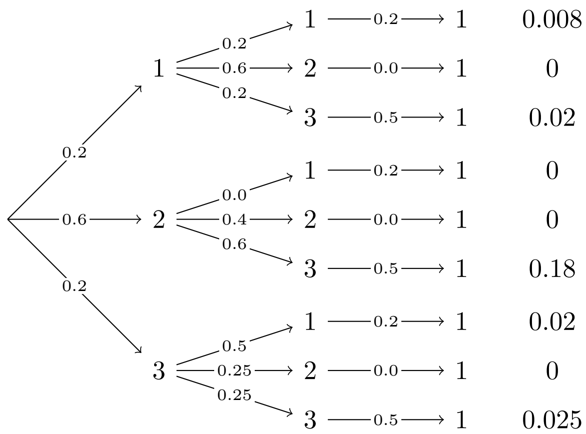
Aufgabe 3.7

(a) Baumdiagramm:



$P(n_2 = 3) = 0.45$

(b) Baumdiagramm:



$P(n_3 = 1) = 0.253$

Aufgabe 3.8

X_i ist die Farbe der Kugel in der i-ten Ziehung.

(a) $P(X_1 = r) \cdot P(X_2 = r|X_1 = r) = P(X_1 = r, X_2 = r)$

$$\frac{7}{10} \cdot P(X_2 = r|X_1 = r) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9}$$

$$P(X_2 = r|X_1 = r) = \frac{2}{3}$$

(b) $P(X_1 = w) \cdot P(X_2 = r|X_1 = w) = P(X_1 = w, X_2 = r)$

$$\frac{3}{10} \cdot P(X_2 = r|X_1 = w) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9}$$

$$P(X_2 = r|X_1 = w) = \frac{7}{9}$$

Aufgabe 3.9

F_i: Farbe der Kugel in der i-ten Ziehung

r: Anzahl rote Kugeln vor der Ziehung

$w = 400 - r$: Anzahl weisse Kugeln vor der Ziehung

$$
\begin{aligned}
P(F_1 = \text{rot}, F_2 = \text{weiss}) + P(F_1 = \text{weiss}, F_2 = \text{rot}) &= \frac{1}{2} \\
\frac{400-r}{400} \cdot \frac{r}{399} + \frac{r}{400} \cdot \frac{400-r}{399} &= \frac{1}{2} \\
\frac{2(400-r)r}{400 \cdot 399} &= \frac{1}{2} \\
(400-r)r &= 39\,900 \\
-r^2 + 400r - 39\,900 &= 0 \\
r_1 &= 190 \\
r_2 &= 210
\end{aligned}
$$

190 rote und 210 weisse Kugeln (oder umgekehrt)