Aufgabe 3.1

Wir werfen zwei faire Spielwürfel.

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, einen Pasch (zwei gleiche Augenzahlen) zu werfen?

(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, einen Pasch zu werfen, wenn bekannt ist, dass die Summe der Augenzahlen kleiner oder gleich 4 ist.

(c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Würfel die Augenzahl 6 zeigt.

(d) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Würfel die Augenzahl 6 zeigt, wenn bekannt ist, dass die Augenzahlen verschieden sind.

Aufgabe 3.2

Max hat für den kommenden Samstag folgenden Präferenzen:

- Wenn die Sonne scheint, wird er entweder das Freibad besuchen (60%) oder Beachvolleyball spielen.
- Wenn die Sonne nicht scheint, wird er entweder mit Freunden ins Kino gehen (80%) oder sich auf die Mathematik-Prüfung am nächsten Montag vorbereiten.

Am kommenden Samstag scheint die Sonne mit einer Wahrscheinlichkeit von 70%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ...

(a) besucht Max das Freibad?

(b) spielt Max Beachvolleyball?

(c) geht Max ins Kino?

(d) lernt Max für die Prüfung?

Aufgabe 3.3

Es seien Ω ein Stichprobenraum, Σ die Sigma-Algebra von Ω und P eine Wahrscheinlichkeitsfunktion, welche die Axiome von Kolmogoroff erfüllt. Ferner sei $C \in \Sigma$ mit $P(C) \neq 0$.

Zeige, dass für beliebige disjunkte Ereignisse A, $B \in \Sigma$ folgende Formel gilt:

$$P(A \cup B \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C)$$

Aufgabe 3.4

Eine Lieferung von 100 Stück eines Artikels wird geprüft, indem zufällig 4 Artikel ausgewählt und untersucht werden. Wenn mindestens einer der Artikel defekt ist, wird die Lieferung zurückgewiesen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Lieferung zurückgewiesen wird, wenn sich darin insgesamt 5 defekte Artikel befinden.

Aufgabe 3.5

Es seien Ω ein Stichprobenraum, Σ die Sigma-Algebra von Ω und P eine Wahrscheinlichkeitsfunktion, welche die Axiome von Kolmogoroff erfüllt. Ferner sei $B \in \Sigma$ mit $P(B) \neq 0$.

Zeige, dass für ein beliebiges Ereignis $A \in \Sigma$ die folgende Formel gilt:

$$P(A \cap B|B) = P(A|B)$$

Aufgabe 3.6

Eine PAM-Klasse, die aus 4 Schülerinnen und 12 Schülern besteht, soll zufällig (z. B. durch das Los) in 4 gleich grosse Gruppen eingeteilt werden. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in jeder Gruppe genau ein Mädchen befindet?

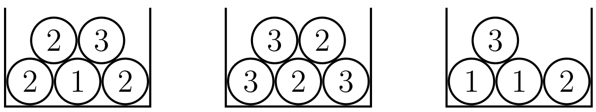
Hinweis: Betrachte die folgenden Ereignisse

- $A_1 = \{$Schülerin 1 ist in irgend einer Gruppe$\}$
- $A_2 = \{$Schülerin 1 und 2 sind in verschiedenen Gruppen$\}$
- $A_3 = \{$Schülerin 1, 2 und 3 sind in verschiedenen Gruppen$\}$
- $A_4 = \{$Schülerin 1, 2, 3 und 4 sind in verschiedenen Gruppen$\}$

und fasse Ereignis A_4 als Resultat eines mehrstufigen Versuchs auf.

Aufgabe 3.7

In drei Gefässen befinden sich nummerierte Kugeln.



Gefäss 1 Gefäss 2 Gefäss 3

Die Kugeln in den Gefässen werden gut gemischt. Aus Gefäss 1 wird zufällig eine Kugel gezogen, deren Nummer n_1 notiert und wieder ins Gefäss 1 zurückgelegt. Anschliessend wird aus dem Gefäss mit der Nummer n_1 eine zweite Kugel gezogen, deren Nummer n_2 notiert und wieder in ihr Gefäss zurückgelgt. Dann wird aus dem Gefäss mit der Nummer n_2 eine dritte Kugel gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat

(a) die zweite gezogene Kugel die Nummer 3?

(b) die dritte gezogene Kugel die Nummer 1?

Aufgabe 3.8

Eine Urne enthält 7 rote und 3 weisse Kugeln. Es weden zwei Kugeln nacheinander ohne zurücklegen gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(a) dass die zweite gezogene Kugel rot ist, wenn die erste Kugel bereits rot war.

(b) dass die zweite gezogene Kugel rot ist, wenn die erste Kugel weiss war.

Aufgabe 3.9

Eine Urne enthält 400 Kugeln. Einige davon sind rot, die übrigen sind weiss. Es werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Die Wahrscheinlichkeit, das die beiden gezogenen Kugeln unterschiedliche Farben haben, beträgt $\frac{1}{2}$.

Wie viele rote und weisse Kugeln befanden sich vor der Ziehung in der Urne?