Aufgabe 2.1

(a) $\Omega = \{(t,t),(t,\bar{t}),(\bar{t},t),(\bar{t},\bar{t})\}$

(t = Treffer, $\bar{t}$ = kein Treffer)

(b) $\Omega = \{www, wwz, wzw, wzz, zww, zwz, zzw, zzz\}$

(w = Wappen, z = Zahl)

(c) $\Omega = \{ss, sr, sw, ws, wr, ww, rs, rw\}$

(s = schwarz, r = rot, w = weiss)

(d) $$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),\\ (2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,3),(3,4),(3,5),\\ (3,6),(4,4),(4,5),(4,6),(5,5),(5,6),(6,6)\}$$

(e) $\Omega = \{(5),(\bar{5},5),(\bar{5},\bar{5},5),(\bar{5},\bar{5},\bar{5},5),\dots\}$

oder kürzer: $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, \dots\}$

mit E_i: beim i-ten Wurf erscheint erstmals die Augenzahl 5

Aufgabe 2.2

(a) E: Es liegt genau einmal *Wappen* oben.

$\overline{E}$: Es liegt zweimal oder gar nicht *Wappen* oben.

(b) E: Es liegt mindestens einmal *Wappen* oben.

$\overline{E}$: Es liegt kein *Wappen* oben.

(c) E: Das Auto passiert beide Ampeln bei „grün“.

$\overline{E} = \{(g,r),(g,o),(r,g),(o,g),(o,o),(r,r),(o,r),(r,o)\}$

Aufgabe 2.3

(a) $E_1 = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$

$E_2 = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),\dots,(6,6)\}$

$E_1 \cap E_2 = \{(2,6),(4,4),(6,2)\}$

(b) $E_1 = \{(2,5),(5,2)\}$

$E_2 = \{(6,1),(1,6)\}$

$E_1 \cup E_2 = \{(1,6),(2,5),(5,2),(6,1)\}$

(c) $E_1 = \{(4,6),(5,5),(6,4)\} \cup \{(5,6),(6,5)\} \cup \{(6,6)\}$

$E_2 = \{(4,6),(6,4)\}$

$E_1 \cap \overline{E_2} = \{(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$

Aufgabe 2.4

(a) Gegenereignis von A?

$\overline{A} = \{1,3,4,5\}$

(b) Das sichere Ereignis?

Ω

(c) Welche Ereignisse sind Elementarereignisse?

$E = \{5\}$

(d) Welche Ereignisse ziehen andere nach sich?

$A \subset B$, $D \subset C$

(e) Bestimme das Ereignis „C oder D tritt ein“.

$C \cup D = \{1,3,4,5\}$

Aufgabe 2.4

(f) Bestimme das Ereignis „Ereignis C und D tritt ein“.

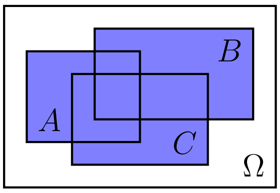
$C \cap D = \{3\}$

(g) Welche Ereignisse sind (paarweise) unvereinbar?

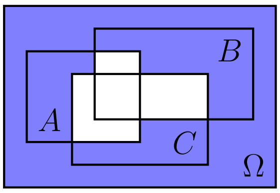
- A und C
- A und D
- A und E
- B und C
- B und E
- D und E

Aufgabe 2.5

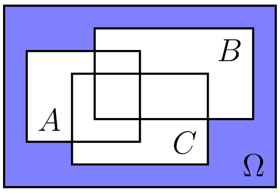
(a) $A \cup B \cup C$



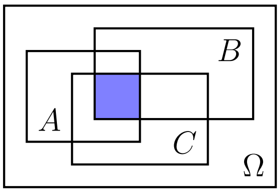
(b) $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$



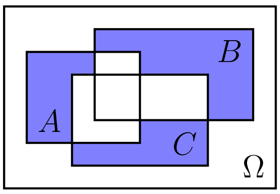
(c) $(A \cup B \cup C)^c$



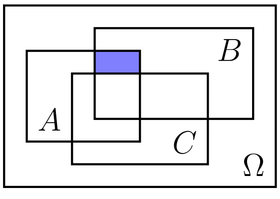
(d) $A \cap B \cap C$



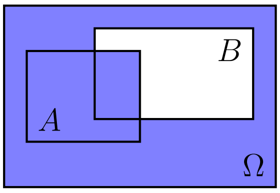
(e) $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$



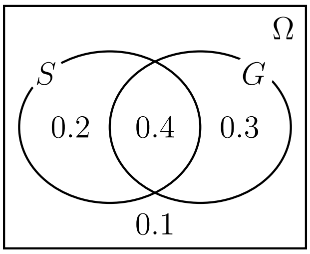
(f) $A \cup B \cap C^c$



(g) $A \cup B^c$



Aufgabe 2.6



(a) $P(\text{schnell und genau}) = 0.4$

(b) $P(\text{schnell aber nicht genau}) = 0.3$

(c) $P(\text{weder schnell noch genau}) = 0.1$

Aufgabe 2.7

(a) $P(A) = P(\{2,4,6\}) = \frac{1}{2}$

(b) $P(B) = P(\{2,3,5\}) = \frac{1}{2}$

(c) $P(C) = P(\{3,4,5,6\}) = \frac{2}{3}$

(d) $P(A \cap B) = P(\{2\}) = \frac{1}{6}$

(e) $P(B \cup C) = P(\{2,3,4,5,6\}) = \frac{5}{6}$

(f) $P(A \cap B \cap C) = P(\{\,\}) = 0$

(g) $P(\overline{A} \cup B) = P(\{3,5\}) = \frac{1}{3}$

(h) $P(A \cup B \cup \overline{C}) = P(\{1,2,3,4,5,6\}) = 1$

Aufgabe 2.8

(a) $1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) \overset{(3)}{=} P(A) + P(\overline{A})$

$$\Rightarrow \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

(b) $P(\emptyset) \overset{(a)}{=} 1 - P(\overline{\emptyset}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

(c) $P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap [B \cup \overline{B}])$

$$\overset{\text{DG}}{=} P([A \cap B] \cup [A \cap \overline{B}]) \overset{(3)}{=} P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

$$\Rightarrow \quad P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

(d) Stelle $A \cup B$ als Vereinigung disjunkter Mengen dar:

$$A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (B \cap \overline{A})$$

$$P(A \cup B) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) + P(B \cap \overline{A})$$
$$\overset{(c)}{=} P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A)$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Aufgabe 2.9

(a) $P(\text{WWW}) = \frac{1}{8}$

(b) $P(\text{WZW}) = \frac{1}{8}$

(c) $P(\text{WWZ}) + P(\text{WZW}) + P(\text{ZWW}) = \frac{3}{8}$

(d) $P(\text{WWW}) + P(\text{WWZ}) + P(\text{WZW}) + P(\text{ZWW}) = \frac{1}{2}$

Aufgabe 2.10

(a) $E = \{(x, y) \colon X = Y\}$
$\quad = \{(1, 1), (2, 2), \ldots, (6, 6)\}$

$$P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(b) $E = \{(x, y) \colon X + Y > 10\}$
$\quad = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$

$$P(E) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

(c) $E = \{(x, y) \colon Y \neq 4\}$
$\quad = \Omega \setminus \{(1, 4), (2, 4), \ldots, (6, 4)\}$

$$P(E) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

(d) $E = \{(x, y)\colon X - Y = 2\}$
$= \{(6, 4), (5, 3), (4, 2), (3, 1)\}$

$$P(E) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

(e) $E = \{(x, y)\colon |X - Y| = 3\}$
$= \{(6, 3), (3, 6), (5, 2), (2, 5), (4, 1), (1, 4)\}$

$$P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(f) $E = \{(x, y)\colon \max(X, Y) = 4\}$
$= \{(4, 4), (4, 5), (5, 4), (4, 6), (6, 4)\}$

$$P(E) = \frac{5}{36}$$

Aufgabe 2.11

$x =$ Anzahl rote Kugeln

(a)
$$\begin{aligned} P(w) &= \frac{1}{3} \\ \frac{7}{7+5+x} &= \frac{1}{3} \\ \frac{7}{12+x} &= \frac{7}{21} \\ x &= 9 \text{ rote Kugeln} \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} P(r) &= \frac{1}{4} \\ \frac{x}{7+5+x} &= \frac{1}{4} \\ 4x &= 12 + x \\ 3x &= 12 \\ x &= 4 \text{ rote Kugeln} \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} P(b) &> \frac{3}{10} \\ \frac{5}{7+5+x} &> \frac{3}{10} \\ 50 &> 36 + 3x \\ x &\leq 4 \end{aligned}$$

2, 3, oder 4 rote Kugeln

Aufgabe 2.12

Die Aufgaben lassen sich mehr oder weniger „mechanisch“ lösen, wenn man zur Berechnung der Anzahl a, der durch d teilbaren Zahlen in der Menge

$$\{n_{\min}, n_{\min}+1, n_{\min}+2, \ldots, n_{\max}-1, n_{\max}\}$$

folgende Funktion verwendet:

$$a = \left\lfloor \frac{n_{\max}}{d} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n_{\min}-1}{d} \right\rfloor$$

- Der Minuend zählt die Anzahl der der durch d teilbaren Zahlen in der Menge $\{0, 1, 2, \ldots, n_{\max}\}$
- Der Subtrahend zählt die Anzahl der der durch d teilbaren Zahlen in der Menge $\{0, 1, 2, \ldots, n_{\min}-1\}$

(a) $a = \left\lfloor \frac{999}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{10} \right\rfloor = 99 - 9 = 90$

$P(E) = \frac{90}{900} = 0.1$

(b) $a = \left\lfloor \frac{999}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{6} \right\rfloor = 166 - 16 = 150$

$P(\overline{E}) = 1 - \frac{150}{900} = \frac{5}{6}$

(c) $a = \left\lfloor \frac{999}{14} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{14} \right\rfloor = 71 - 7 = 64$

$P(E) = \frac{64}{900} = \frac{16}{225}$

(d) E_1: Zahl durch 2 teilbar: $a_1 = 450$

E_2: Zahl durch 7 teilbar: $a_2 = 128$

E_3: Zahl durch 14 teilbar: $a_3 = 64$

$P(E) = \frac{450 + 128 - 2 \cdot 64}{900} = \frac{1}{2}$

Aufgabe 2.13

(a) $P(A) = P\big(\{55\}\big) = \frac{1}{64}$

(b) $P(B) = P\big(\{18, 81, 27, 72, 36, 63, 45, 54\}\big) = \frac{8}{8^2} = \frac{1}{8}$

(c) $P(C) = P\big(\{51, \ldots, 58, 61, 62, \ldots, 68\}\big) = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$

Aufgabe 2.14

4.4. bis 6.6: $30 + 31 + 2 = 63$ Tage

6.6. bis 8.8: $30 + 31 + 2 = 63$ Tage

8.8. bis 10.10: $31 + 30 + 2 = 63$ Tage

10.10. bis 12.10: $31 + 30 + 2 = 63$ Tage

Alle Differenzen sind durch 7 teilbar, also $p = 1$

Aufgabe 2.15

(a) $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = p$; $P(6) = 2p$

$$\begin{aligned} P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) &= 1 \\ 5p + 2p &= 1 \\ 7p &= 1 \\ P(4) = p &= 1/7 \end{aligned}$$

(b) $P(1) = k \cdot 1$, $P(2) = k \cdot 2$, $\ldots$, $P(6) = k \cdot 6$

$$\begin{aligned} P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) &= 1 \\ k + 2k + 3k + 4k + 5k + 6k &= 1 \\ 21k &= 1 \\ k &= 1/21 \\ P(4) = 4k &= 4/21 \end{aligned}$$

(c) $P(1) = \frac{1}{15}$, $P(2) = \frac{1}{15} + d$, $\ldots$, $P(6) = \frac{1}{15} + 5d$

$$\begin{aligned} 1 &= P(1) + P(1) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) \\ 1 &= \tfrac{1}{9} + \left(\tfrac{1}{9} + d\right) + (\tfrac{1}{9} + 2d) + \cdots + (\tfrac{1}{9} + 5d) \\ 1 &= \tfrac{6}{9} + 15d \\ \tfrac{1}{3} &= 15d \\ d &= \tfrac{1}{45} \end{aligned}$$

$$P(4) = \tfrac{1}{9} + 3 \cdot \tfrac{1}{45} = \tfrac{8}{45}$$

Aufgabe 2.16

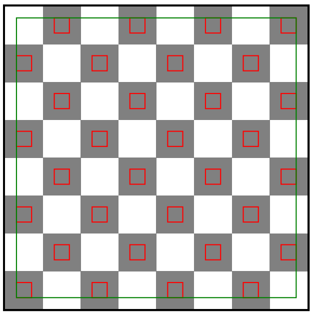
Inhalt der möglichen Landefläche für den Mittelpunkt des Ballquerschnitts:
$8\,\mathrm{cm} \cdot 8\,\mathrm{cm} = 64\,\mathrm{cm}^2$

Inhalt der günstigen Landefläche für den Mittelpunkt des Ballquerschnitts:
$(8 - 5)\,\mathrm{cm} \cdot (8 - 5)\,\mathrm{cm} = 9\,\mathrm{cm}^2$

$$p = \frac{9}{64}$$

Aufgabe 2.17

Das Geldstück wird mit seinen Mittelpunkt M identifizert.



Inhalt der günstigen Orte für M: $g = 32(4-2)(4-2) = 128\,\text{cm}^2$

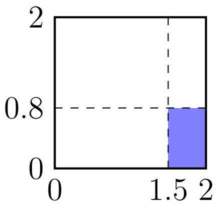
Inhalt der möglichen Orte für M: $m = (32-2)(32-2) = 900\,\text{cm}^2$

$P(\text{Münze innerhalb Schwarz}) = \dfrac{g}{m} = 0.142$

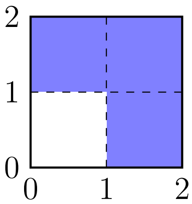
Aufgabe 2.18

Da der Flächeninhalt $2 \cdot 2 = 4$ beträgt, muss jeder Inhalt mit dem Faktor $\frac{1}{4} = 0.25$ multipliziert werden.

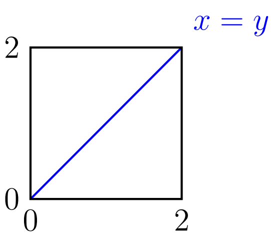
(a) $P(X \geq 1.5, Y \leq 0.5) = 0.5 \cdot 0.8 \cdot 0.25 = 0.1$



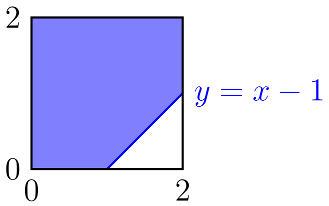
(b) $P(X > 1 \text{ oder } Y > 1) = 3 \cdot 0.25 = 0.75$



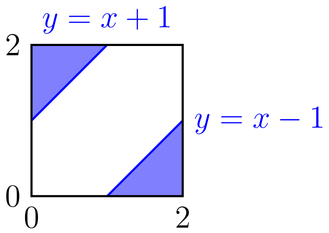
(c) $P(X = Y) = 0 \cdot 0.25 = 0$



(d) $P(X < Y + 1) = \dfrac{4 - 0.5}{4} = 0.875$

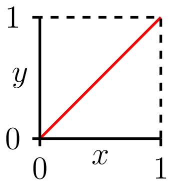


(e) $P(|X - Y| > 1) = \dfrac{0.5 + 0.5}{4} = 0.25$

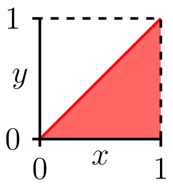


Aufgabe 2.19

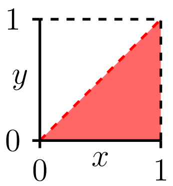
(a) $P(x = y) = 0$



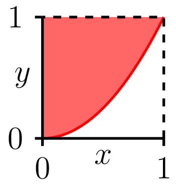
(b) $P(y \leq x) = \dfrac{1}{2}$



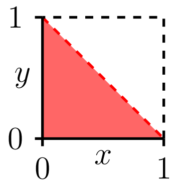
(c) $P(y < x) = \dfrac{1}{2}$



(d) $P(y > x^2) = 1 - \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = 1 - \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$



(e) $P(x + y \leq 1) \Leftrightarrow P(y \leq 1 - x) = \frac{1}{2}$



(f) $$P\left(\frac{1}{2} \leq x \cdot y\right) = P\left(y \geq \frac{1}{2x}\right) = 0.5 - \int_{0.5}^1 \frac{1}{2x} \,\mathrm{d}x$$

$$= 0.5 - \frac{1}{2}\left[\ln x\right]_{0.5}^1$$

$$= 0.5 - \frac{1}{2}(0 - \ln 0.5) = 0.153$$