Aufgabe 2.1

Beschreibe den Stichprobenraum der folgenden Zufallsexperimente in aufzählender Form, d.h. $\Omega = \{\dots\}$. Es können sinnvolle Abkürzungen verwendet werden (z. B. Z für Zahl).

(a) Mit verbundenen Augen zweimal auf ein Tor schiessen.

(b) Eine Münze wird dreimal nacheinander geworfen.

(c) In einer Urne liegen zwei schwarze, zwei weisse und eine rote Kugel. Es werden nacheinander und ohne Zurücklegen zwei Kugeln gezogen.

(d) Zwei gleich aussehende Spielwürfel werden geworfen.

(e) Ein Spielwürfel wird so lange geworfen, bis erstmals die Augenzahl 5 erscheint.

Aufgabe 2.2

Gegeben ist ein Zufallsexperiment. Formuliere zum Ereignis E das Gegenereignis $\overline{E}$.

(a) Eine Münze wird zweimal nacheinander geworfen.

E: Es liegt genau einmal *Wappen* oben.

(b) Eine Münze wird zweimal nacheinander geworfen.

E: Es liegt mindestens einmal *Wappen* oben.

(c) Ein Auto muss nacheinander zwei zufällig geschaltete Ampeln (grün, orange, rot) passieren.

E: Das Auto passiert beide Ampeln bei „grün“.

Aufgabe 2.3

Ein Spielwürfel zweimal nacheinander geworfen. Bestimme die Ereignisse E_1 und E_2 und ihre jeweilige Verknüpfung in aufzählender Form.

(a) E_1: Die Summe der Augenzahlen beträgt 8.

E_2: Beide Augenzahlen sind gerade.

E_1 und $E_2 = ?$

(b) E_1: Das Produkt der Augenzahlen ist 10.

E_2: Der Unterschied der beiden Augenzahlen ist 5.

E_1 oder $E_2 = ?$

(c) E_1: Die Summe der Augenzahlen beträgt mindestens 10.

E_2: Das Produkt der Augenzahlen beträgt 24

E_1 und $\overline{E}_2 = ?$

Aufgabe 2.4

Bei Würfeln mit einem Spielwürfel ($\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$) sind folgende Ereignisse gegeben: $A = \{2,6\}$, $B = \{2,4,6\}$, $C = \{1,3,5\}$, $D = \{3,4\}$ und $E = \{5\}$

(a) Bestimme das Gegenereignis von A?

(b) Welches ist das sichere Ereignis?

(c) Welche Ereignisse sind Elementarereignisse?

(d) Welche der gegebenen Ereignisse ziehen andere nach sich?

(e) Bestimme das Ereignis „C oder D tritt ein“.

(f) Bestimme das Ereignis „Ereignis C und D tritt ein“.

(g) Welche Ereignispaare sind unvereinbar?

Aufgabe 2.5

Drücke jedes der folgenden Ereignisse durch die Ereignisse A, B und C durch die Mengenoperationen *Vereinigung*, *Durchschnitt* und *Komplenent* aus. Zeichne jeweils das entsprechende Venn-Diagramm.

(a) Mindestens eines der Ereignisse A, B, C tritt ein.

(b) Höchstens eines der Ereignisse A, B, C tritt ein.

(c) Keines der Ereignisse A, B, C tritt ein.

(d) Alle drei Ereignisse A, B, C treten ein.

(e) Genau eines der Ereignisse A, B, C tritt ein.

(f) Die Ereignisse A und B treten ein; jedoch nicht Ereignis C.

(g) A tritt ein oder B tritt nicht ein.

Aufgabe 2.6

Im Kollegi arbeiten 60% der Schüler genau, 70% arbeiten schnell und 40% arbeiten schnell und genau. Nun wird ein Schüler zufällig herausgegriffen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit arbeitet er

(a) schnell und genau?

(b) schnell und nicht genau?

(c) weder schnell noch genau?

Aufgabe 2.7

Ein fairer Spielwürfel wird einmal geworfen. Betrachte folgende Ereignisse

- A: Die Augenzahl ist gerade.
- B: Die Augenzahl ist prim.
- C: Die Augenzahl ist grösser als 2.

Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.

(a) $P(A)$

(b) $P(B)$

(c) $P(C)$

(d) $P(A \cap B)$

(e) $P(B \cup C)$

(f) $P(A \cap B \cap C)$

(g) $P(\overline{A} \cup B)$

(h) $P(A \cup B \cup \overline{C})$

Aufgabe 2.8

Gegeben: Stichprobenraum Ω und Ereignisse A, B in Ω
Beweise mit Hilfe der Axiome von Kolmogoroff folgende Aussagen:

(a) $P(øA) = 1 - P(A)$

(b) $P(\emptyset) = 0$

(c) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

(d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Aufgabe 2.9

Eine faire Münze mit den zwei Seiten *Wappen* (W) und *Zahl* (Z) wird dreimal nacheinander geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse.

(a) dreimal *Wappen*

(b) die Folge *Wappen*, *Zahl*, *Wappen*

(c) alle Folgen mit zweimal *Wappen* und einmal *Zahl*

(d) alle Folgen mit mehr *Wappen* als *Zahl*

Aufgabe 2.10

Ein fairer Spielwürfel wird zweimal geworfen. X bezeichnet das Resultat des ersten Wurfs, Y das Resulat des zweiten Wurfs. Bestimme die Wahrscheinlichkeit der folgende Ereignisse.

(a) $E = \{(x,y)\colon X = Y\}$

(b) $E = \{(x,y)\colon X + Y > 10\}$

(c) $E = \{(x,y)\colon Y \neq 4\}$

(d) $E = \{(x,y)\colon X - Y = 2\}$

(e) $E = \{(x,y)\colon |X - Y| = 3\}$

(f) $E = \{(x,y)\colon \max(X,Y) = 4\}$

Aufgabe 2.11

Aus einer Schachtel mit 7 weissen, 5 blauen und mehreren roten Kugeln wird zufällig eine Kugel gezogen. Wie viele rote Kugelln befinden sich in der Schachtel, wenn die Wahrscheinlichkeit,

(a) dass die gezogene Kugel weiss ist, $\frac{1}{3}$ beträgt,

(b) dass die gezogene Kugel rot ist, $\frac{1}{4}$ beträgt,

(c) dass die gezogene Kugel blau ist, grösser als $\frac{3}{10}$ ist.

Aufgabe 2.12

Eine Urne enthält 1000 Kugeln mit den Nummern

$$100, 101, 102, \ldots, 999.$$

Eine Kugel wird zufällig gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl auf der Kugel

(a) durch 10 teilbar ist,

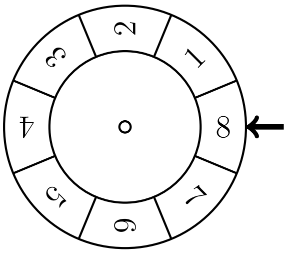
(b) nicht durch 6 teilbar ist,

(c) durch 2 und durch 7 teilbar ist,

(d) durch 2 oder 7 aber nicht durch 2 und 7 teilbar ist.

Aufgabe 2.13

Ein faires Glücksrad wird zweimal gedreht. Die erste Drehung erzeugt die Zehnerziffer Z, die zweite die Einerziffer E einer Zahl X.



Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

(a) $A = \{x\colon X = 55\}$,

(b) $B = \{x\colon E + Z = 9\}$,

(c) $C = \{x\colon 50 \leq X \leq 70\}$.

Aufgabe 2.14

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass im gleichen Jahr der 4.4., 6.6., 8.8., 10.10. und 12.12 auf den gleichen Wochentag fallen?

Aufgabe 2.15

Bestimme den Wert der Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(4)$ für die Augenzahl 4 bei einem Spielwürfel, der wie folgt gezinkt wurde.

(a) Die Augenzahl 6 kommt im Mittel doppelt so häufig vor wie jede der anderen Augenzahlen.

(b) Die Wahrscheinlichkeiten sind proportional zur Augenzahl.

(c) Die Wahrscheinlichkeiten für die Augenzahlen 1 bis 6 bilden eine aufsteigende arithmetische Folge mit $P(1) = \frac{1}{9}$.

Aufgabe 2.16

Ein Ball von 5 cm Durchmesser wird, ohne dass dabei gezielt wird, gegen ein Drahtgitter mit quadratischen Maschen von 8 cm Seitenlänge geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Ball, ohne einen Draht zu berühren, durch das Gitter hindurchfliegt? Die Dicke des Drahts kann dabei vernachlässigt werden.

Aufgabe 2.17

Man wirft ein Geldstück von 2 cm Durchmesser zufällig auf ein Schachbrett, dessen Felder eine Seitenlänge von 4 cm haben. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es ganz in einem schwarzen Feld liegt? (Dabei betrachten wir nur die Würfe, bei denen das Geldstück ganz innerhalb des Schachbrettes von 32 cm Seitenlänge liegt.)

Aufgabe 2.18

Xenia und Yves wählen jeweils zufällig und unabhängig voneinander eine reelle Zahl aus dem Intervall $[0, 2]$. Es wird eine uniforme (gleichförmige) Wahrscheinlichkeitsverteilung vorausgesetzt, bei der ein Ereignis proportional zur seinem Flächeninhalt in der grafischen Darstellung ist. Berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

(a) Die von Xenia gewählte Zahl ist grösser als 1.5 und die von Yves ist kleiner als 0.8.

(b) Mindestes eine der gewählten Zahlen ist grösser als 1.

(c) Die beiden gewählten Zahlen sind gleich.

(d) Die von Xenia gewählte Zahl ist höchstens um 1 grösser als die Zahl, die Yves gewählt hat.

(d) Die von Xenia gewählte Zahl unterscheidet sich um mindestens 1 von der, die Yves gewählt hat.

Aufgabe 2.19

x und y seien zwei uniform (gleichförmig) verteilte und unabhängige Zufallszahlen im Intervall $I = [0, 1]$. Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

(a) $x = y$

(b) $y \leq x$

(c) $y < x$

(d) $y > x^2$

(e) $x + y \leq 1$

(f) $\frac{1}{2} \leq x \cdot y$