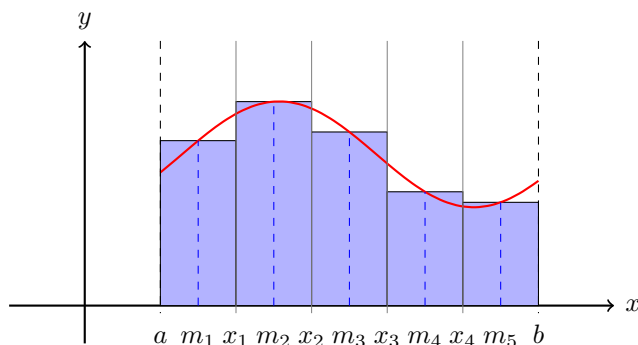

Integralrechnung
Theorie

1 Das bestimmte Integral

f ist eine auf $I = [a, b]$ stetige Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$.



$$M = \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ und } 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Gesucht: Flächeninhalt A von M

Die Idee

- Zerlege $I = [a, b]$ in n Teile der Breite $h = \frac{b-a}{n}$
- Bestimme die Intervallmitten: $m_i = a + (i - 0.5) \cdot h$
- Berechne die Funktionswerte: $y_i = f(m_i)$
- Der Inhalt des i -ten Streifens wird durch ein Rechteck der Breite h und der Höhe $y_i = f(m_i)$ ersetzt.

$$A \approx h \cdot f(m_1) + h \cdot f(m_2) + \dots + h \cdot f(m_n)$$

$$A \approx h [f(m_1) + f(m_2) + \dots + f(m_n)]$$

$$A \approx h \cdot \sum_{i=1}^n f(m_i) \quad \text{wobei } m_i = a + (i - 0.5)h$$

Definition

Wir definieren damit das *bestimmte Integral*:

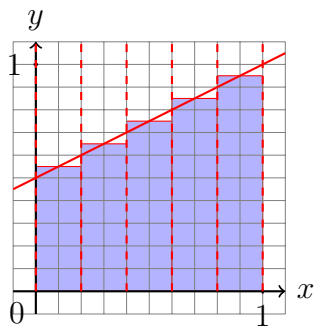
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(h \cdot \sum_{i=1}^n f(m_i) \right)$$

falls der Grenzwert rechts existiert.

[Bei stetigen Funktionen ist dies immer der Fall.]

Beispiel 1.1

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x; a = 0, b = 1; n = 5 \quad h = \frac{1-0}{5} = 0.2$$

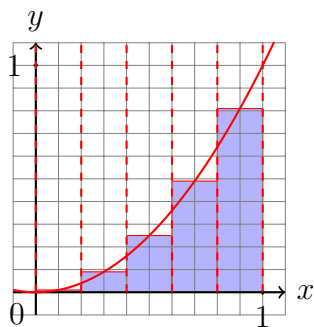


i	m_i	$f(m_i)$
1	0.1	0.55
2	0.3	0.65
3	0.5	0.75
4	0.7	0.85
5	0.9	0.95
	Σ	3.75

$$A = 0.2 \cdot 3.75 = 0.75 \text{ (exakt)}$$

Beispiel 1.2

$$f(x) = x^2; a = 0, b = 1; n = 5 \quad h = \frac{1-0}{5} = 0.2$$



i	m_i	$f(m_i)$
1	0.1	0.01
2	0.3	0.09
3	0.5	0.25
4	0.7	0.49
5	0.9	0.81
	Σ	1.65

$$A \approx 0.2 \cdot 1.65 = 0.330$$

1.1 Eigenschaften

„leeres“ Integral

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Vertauschungsregel

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

Intervalladditivität

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \quad (\text{für } a \leq b \leq c)$$

1.2 TI-84-Programm (Rechteckmethode)

Hauptprogramm

```
PROGRAM: INTEGRAL
:Disp "FUNKTION IN prgmF"
:Input "LOWER: ",A
:Input "UPPER: ",B
:Input "N: ",N
:(B-A)/N→H
:0→S
:For(I,1,N)
:A+(I-0.5)*H→X
:prgmF
:S+Y→S
:End
:Disp H*S
```

Unterprogramm für die Funktion

```
PROGRAM:F
:X2+1→Y
```

1.3 Das Riemannsches Integral

Wir dürfen vermuten, dass die Näherungswerte für den gesuchten Flächeninhalt bei zunehmender Anzahl Streifen eine konvergente Folge bilden und dass der Grenzwert dieser Folge der gesuchte Flächeninhalt ist. Dieser Grenzwert erhält einen eigenen Namen. Doch zuvor müssen wir sicher sein können, dass der Grenzwert weder von der Wahl der Streifenbreiten noch von den Zwischenstellen abhängig ist.

Eine auf $I = [a, b]$ definierte beschränkte Funktion f , ist genau dann (im Riemannschen Sinne) integrierbar, wenn für jede Folge von Zerlegungen $X_n = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ von I mit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ und für jede Folge von Stützstellen $S_n = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ mit $x_0 \leq \xi_1 \leq x_1, \dots, x_{n-1} < \xi_n < x_n$ der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\Delta x_i}$$

existiert. Dieser Grenzwert wird *bestimmtes Integral* von f über dem Intervall $[a, b]$ genannt und formal so beschrieben:

$$\int_a^b f(x) dx$$

2 Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

2.1 Die Flächeninhaltsfunktion

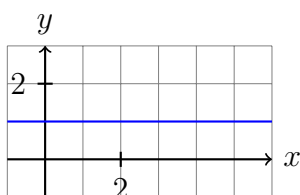
[Bild]

$$F_c(x) \stackrel{\text{Def.}}{=} \int_c^x f(t) dt \quad (\text{Flächeninhaltsfunktion})$$

$$\text{damit } \int_a^b f(x) dx = F_c(b) - F_c(a)$$

Beispiel 2.1

$$f(x) = 1$$

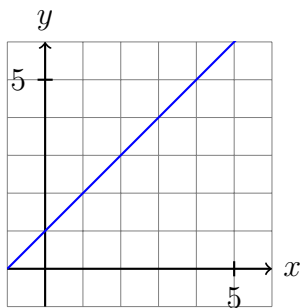


$$F_0(x) = x$$

$$\int_1^3 f(x) dx = F_0(3) - F_0(1) = 3 - 1 = 2$$

Beispiel 2.2

$$f(x) = x + 1$$



$$F_0(x) = \frac{1 + (x + 1)}{2} \cdot x = \frac{1}{2}x^2 + x$$

oder

$$F_{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 1) \cdot (x + 1) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$$

$$\int_2^4 f(x) dx = F_0(4) - F_0(2) = 12 - 4 = 8$$

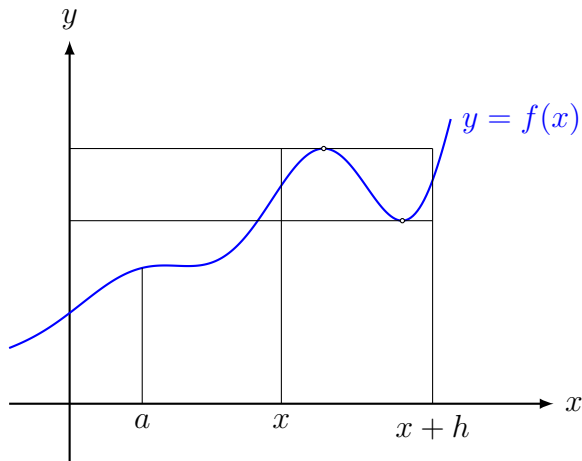
$$(\text{bzw. } F_{-1}(4) - F_{-1}(2) = 12.5 - 4.5 = 8)$$

Vermutung

Die Ableitung der Flächeninhaltsfunktion ist die Randfunktion (Integrand) $f(x)$.

$$F'_c(x) = f(x)$$

2.2 Der Hauptsatz



Wenn die obere Grenze um h vergrößert wird, so verändert sich der Flächeninhalt um

$$\Delta A = F_a(x+h) - F_a(x)$$

Eingrenzen von ΔA :

$$\min_{x \leq t \leq x+h} f(t) \cdot h < \Delta A < \max_{x \leq t \leq x+h} f(t) \cdot h$$

auf allen drei Seiten durch $h > 0$ dividieren:

$$\min_{x \leq t \leq x+h} f(t) < \frac{\Delta A}{h} < \max_{x \leq t \leq x+h} f(t)$$

Grenzwert $h \rightarrow 0$ bilden:

$$f(x) \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{h} \leq f(x)$$

Somit ist

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = F'_c(x)$$

Eine Funktion F mit der Eigenschaft $F'(x) = f(x)$ wird *Stammfunktion* oder *unbestimmtes Integral* von f genannt.

F ist nur bis auf eine additive Konstante (Integrationskonstante) eindeutig bestimmt.

Beispiel:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$$

$$G(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$$

sind zwei mögliche Stammfunktionen von $f(x) = x + 1$.

Sei nun F eine beliebige Stammfunktion von f . Dann gilt:

$$F_a(x) = F(x) + C \tag{1}$$

Für $x = a$ gilt:

$$F_a(a) = F(a) + C$$

Mit

$$F_a(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$$

folgt dann

$$0 = F(a) + C$$

und damit

$$C = -F(a) \tag{2}$$

Einsetzen von (2) in (1):

$$F_a(x) = F(x) - F(a)$$

und zusammen mit (1):

$$\int_a^x f(t) dt = F_a(x) = F(x) - F(a)$$

bzw.

$$\int_a^b f(x) dt = F(b) - F(a)$$

Im Beweis wurde eine stetige Funktion f mit *nichtnegativen* Werten vorausgesetzt. Ein Verallgemeinerung auf beliebige stetige Funktionen ist möglich. Dies ist dann der ...

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Ist f eine stetige Funktion auf dem Intervall $[a, b]$ und ist F eine beliebige Stammfunktion von f , so gilt:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

Bemerkung: Der Hauptsatz gilt auch für stetige Funktionen, deren Vorzeichen auf dem Intervall $[a, b]$ wechselt. Das bestimmte Integral lässt sich dann aber nicht mehr direkt als Flächeninhalt deuten.

3 Rechenregeln

3.1 Integrale der elementaren Funktionen (I)

Die Umkehrung des Differenzierens liefert vorläufig:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

3.2 Integrationsregeln

Summen

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

bzw.

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Beispiel 3.1

$$\int (x + e^x) dx = \int x dx + \int e^x dx = \frac{1}{2}x^2 + e^x + C$$

konstante Faktoren

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

Beispiel 3.2

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} 4 \cos(x) dx &= 4 \int_0^{\pi/2} \cos(x) dx \\ &= 4 [\sin(x)]_0^{\pi/2} \\ &= 4 [\sin(\pi/2) - \sin(0)] = 4 \end{aligned}$$

3.3 Substitutionsregel

Für eine stetige Funktion $f(z)$ und eine differenzierbare Funktion $z = u(x)$ gilt:

$$\frac{dz}{dx} = u'(x) \quad \Rightarrow \quad dz = u'(x) dx$$

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(z) dz = \int_a^b f(u(x)) u'(x) dx$$

Rückwärts gelesen ist dies die Substitutionsregel 1. Art

Beispiel 3.3

$$\begin{aligned} \int_1^3 e^{2x} dx = \dots \quad & u(x) = 2x \quad & u(1) = 2 \\ & \frac{du}{dx} = 2 \quad & u(3) = 6 \\ & dx = \frac{1}{2} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots &= \int_2^6 e^u \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int_2^6 e^u du = \frac{1}{2} [e^u]_2^6 \\ &= \frac{1}{2} [e^6 - e^2] \end{aligned}$$

Alternative Lösung

$$\int e^{2x} dx = \int e^u \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C_u = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

$$\int_1^3 e^{2x} dx = \frac{1}{2} [e^{2x} + C]_1^3 = \frac{1}{2} [e^6 - e^2]$$

Beispiel 3.4

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin(x) \cos(x) dx = \dots \quad & u(x) = \sin x \quad & \sin(0) = 0 \\ & \frac{du}{dx} = \cos x \quad & \sin(\pi/2) = 1 \\ & dx = \frac{1}{\cos x} du \end{aligned}$$

$$\dots = \int_0^1 \cos x \frac{1}{\cos x} du = \int_0^1 1 du = [u]_0^1 = 1$$

Beispiel 3.5

Ist die Substitutionsregel grundsätzlich anwendbar?

- $\int x e^{(x^2)} dx$ **Ja**
- $\int x \sin(x) dx$ **Nein**
- $\int x^3 \sqrt{x^4 + 1} dx$ **Ja**
- $\int x \ln x dx$ **Nein**

Moral

Die Substitutionsregel kann nur dann angewendet werden, der Integrand (bis auf einen konstanten Faktor) ein Produkt aus der Ableitung u' der inneren Funktion u und der äusseren Funktion f ist.

Substitutionsregel 2. Art

In gewissen Situationen kann es vorteilhaft sein, die Integrationsvariable x durch eine differenzierbare und monotone Funktion $x(t)$ zu ersetzen.

Beispiel 3.6

$$\int_0^1 e^x \sqrt{e^x + 1} dx$$

$$x(t) = \ln(t) \quad (\text{monoton: ja}) \quad x_1 = 0 = \ln(t) \quad \Rightarrow \quad t_1 = 1$$

$$dx = t^{-1} dy \quad x_2 = 1 = \ln(t) \quad \Rightarrow \quad t_2 = e$$

$$\dots = \int_1^e e^{\ln(t)} \sqrt{e^{\ln(t)} + 1} \cdot t^{-1} dt = \int_1^e t \sqrt{t + 1} \cdot t^{-1} dx$$

$$= \int_1^e (t + 1)^{1/2} dx = \frac{2}{3} [(t + 1)^{3/2}]_1^e = \frac{2}{3} [(e + 1)^{3/2} - 2^{3/2}]$$

3.4 Partielle Integration

Ist der Integrand ein Produkt zweier Faktoren, so gibt es im Unterschied zur Differentiation keine allgemein gültige Regel, um das Integral eines Produkts auf die Integrale der Faktoren zurückzuführen.

Man kann aber eine Regel angeben, nach der in machen Fällen ein schwierig zu lösendes Integral auf ein einfacheres zurückgeführt werden kann.

Herleitung

Produktregel der Differentialrechnung:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$f'(x)g(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - f(x)g'(x) \quad \left\| \int_a^b \dots dx \right.$$

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = \int_a^b [f(x) \cdot g(x)]' dx - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

Warnung

Das auf diese Weise entstehende Integral braucht nicht einfacher lösbar zu sein. In vielen Fällen lässt sich jedoch bei geeigneter Wahl der Faktoren eine Vereinfachung erreichen.

Beispiel 3.7

$$\int x e^x dx = \dots \quad \begin{array}{l} f'(x) = e^x \Rightarrow f(x) = e^x \\ g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1 \end{array}$$

$$\dots = e^x x - \int e^x \cdot 1 dx = e^x x - e^x + C = e^x(x - 1) + C$$

Beispiel 3.8

$$\int x^2 e^x dx = ? \quad \begin{array}{l} f'(x) = e^x \Rightarrow f(x) = e^x \\ g(x) = x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x \end{array}$$

$$\int x^2 e^x dx = e^x x^2 - \int e^x \cdot 2x dx = e^x \cdot x^2 - 2 \int x \cdot e^x dx$$

Einsetzen von 3.3:

$$\int x^2 e^x dx = e^x x^2 - 2e^x(x - 1) + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

Beispiel 3.9

$$\int \ln x dx = ? \quad \begin{array}{l} f'(x) = 1 \Rightarrow f(x) = x \\ g(x) = \ln x \Rightarrow g'(x) = 1/x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int \ln x \cdot 1 dx &= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x - \int 1 dx \\ &= x \ln x - x + C \end{aligned}$$

Beispiel 3.10

$$\int \sin^2 x \, dx =? \quad \begin{array}{l} f'(x) = \sin x \Rightarrow f(x) = -\cos x \\ g(x) = \sin x \Rightarrow g'(x) = \cos x \end{array}$$

$$\int \sin^2 x \, dx = -\cos x \cdot \sin x + \int \cos^2 x \, dx$$

$$\int \sin^2 x \, dx = -\cos x \cdot \sin x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx$$

$$\int \sin^2 x \, dx = -\cos x \cdot \sin x + x - \int \sin^2 x \, dx$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \cos x \cdot \sin x) + C$$

3.5 Integrale der elementaren Funktionen (II)

$$\int \ln x \, dx = x(\ln|x| - 1) + C \quad [\text{Beispiel 3.9}]$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C$$

Herleitung:

$$\begin{aligned} \int \tan x \, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \int \frac{\sin x}{u} \cdot \frac{1}{-\sin x} \, du \\ &= -\int \frac{1}{u} \, du = -\int \ln|\cos x| + C \end{aligned}$$

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Herleitung:

$$\begin{aligned} \int \arcsin x \, dx &= \int 1 \cdot \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{-1}{2x} \, du \\ &= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} \, du \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \end{aligned}$$

$$\int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

Herleitung:

$$\begin{aligned}
\int \arccos x \, dx &= \int 1 \cdot \arccos x \, dx = x \arccos x - \int x \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
&= x \arccos x - \int \frac{-x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{-1}{2x} \, du \\
&= x \arccos x - \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} \, du \\
&= x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}$$

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

Herleitung:

$$\begin{aligned}
\int \arctan x \, dx &= \int 1 \cdot \arctan x \, dx = x \arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx \\
&= x \arctan x - \int \frac{x}{u} \cdot \frac{1}{2x} \, du \\
&= x \arctan x - \frac{1}{2} \int u^{-1} \, du \\
&= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)
\end{aligned}$$

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ist f eine auf dem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion, so gibt es eine reelle Zahl $\xi \in (a, b)$, so dass

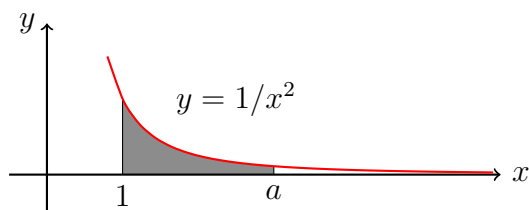
$$\int_a^b f(x) \, dx = f(\xi) \cdot (b-a)$$

[Skizze]

Der Mittelwertsatz ist ein *Existenzsatz*; er verrät nicht, *wie* man die Stelle ξ berechnet.

4 Uneigentliche Integrale (AM)

Beispiel 1



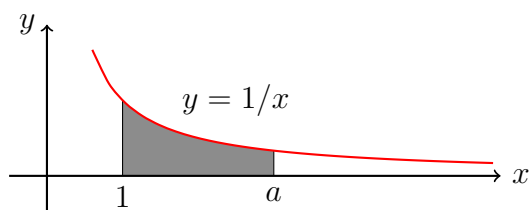
$$\int_1^a \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^a = -\frac{1}{a} - \left(-\frac{1}{1} \right) = 1 - \frac{1}{a} \quad (*)$$

Was geschieht, wenn $a \rightarrow \infty$?

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{1}{x^2} dx \stackrel{(*)}{=} \lim_{a \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{a} \right) = 1 \quad \text{Grenzwert existiert}$$

Das *uneigentliche Integral* $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ ist sinnvoll definiert.

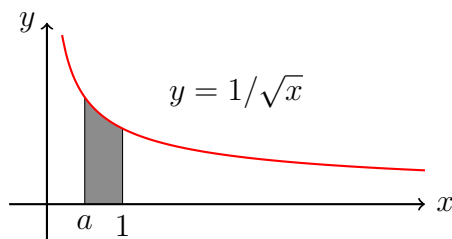
Beispiel 2



$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} [\ln x]_1^a = \lim_{a \rightarrow \infty} (\ln a - 0) = \infty$$

Das uneigentliche Integral existiert nicht.

Beispiel 3

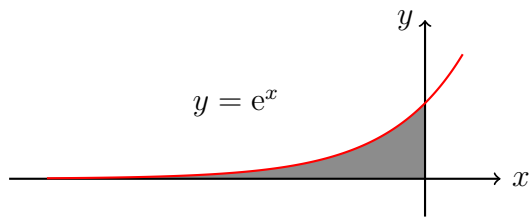


$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_a^1 = 2 - 2\sqrt{a} \quad (*)$$

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \stackrel{(*)}{=} \lim_{a \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{a}) = 2 \quad \text{existiert}$$

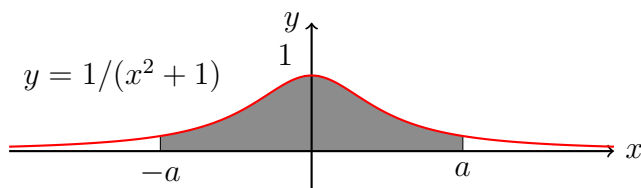
Das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ ist sinnvoll definiert.

Beispiel 4



$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 e^x dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^x]_a^0 \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (e^0 - e^a) = \lim_{a \rightarrow -\infty} (1 - 1/e^{-a}) = 1\end{aligned}$$

Beispiel 5

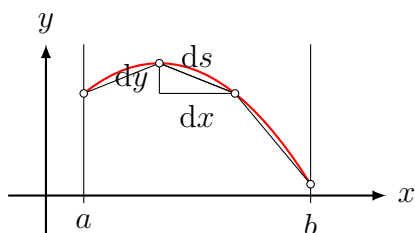


$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \frac{1}{x^2 + 1} dx \stackrel{*}{=} \lim_{a \rightarrow \infty} [\arctan x]_{-a}^a \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} [\arctan a - (-\arctan a)] \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} [2 \arctan a] = 2 \cdot \pi/2 = \pi\end{aligned}$$

* FTB S. 73

5 Bogenlänge von Kurven

Gesucht: Länge s eines Graphen über dem Intervall $[a, b]$



$$\begin{aligned} s &= \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b \sqrt{(1 + dy^2/dx^2) dx^2} \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \end{aligned}$$

Beispiel 5.1

Bogenlänge von $f(x) = x^2$ über $[0, 4]$?

$$f'(x) = 2x$$

$$\begin{aligned} s &= \int_0^4 \sqrt{1 + 4x^2} dx = 2 \int_0^4 \sqrt{\frac{1}{4} + x^2} dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{2}x\sqrt{\frac{1}{4} + x^2} + \frac{1}{8} \ln \left(x + \sqrt{\frac{1}{4} + x^2} \right) \right]_0^4 \\ &= \left[x\sqrt{\frac{1}{4} + x^2} + \frac{1}{4} \ln \left(x + \sqrt{\frac{1}{4} + x^2} \right) \right]_0^4 \\ &= 4\sqrt{16.25} + 0.25 \ln(4 + \sqrt{16.25}) - 0.25 \ln 0.5 \approx 16.81 \end{aligned}$$

Bemerkung

Das letzte Beispiel zeigt, dass schon bei einfachen Potenzfunktionen die Berechnung der Bogenlänge mittels elementarer Integrale kompliziert wird. In vielen Fällen ist eine exakte Berechnung gar nicht möglich, weshalb man auf Näherungsmethoden zurückgreifen muss.

Kurven in Parameterform $(x(t), y(t))$

$$s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} = \dots$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) \quad \Rightarrow \quad dx = \dot{x}(t) dt$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) \quad \Rightarrow \quad dy = \dot{y}(t) dt$$

$$\dots = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

$$\text{analog im } \mathbb{R}^3: s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

Beispiel 5.2

Bogenlänge von $K = \{(r \cos t, r \sin t) : 0 \leq t < 2\pi\}$?

$$x(t) = r \cos t \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = -r \sin t$$

$$y(t) = r \sin t \quad \Rightarrow \quad \dot{y}(t) = r \cos t$$

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} r \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt \\ &= r \int_0^{2\pi} 1 dt = r [t]_0^{2\pi} = 2\pi r \end{aligned}$$

Kurven in Polarform $(r(\varphi), \varphi)$

$$\text{Parameterform: } s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

Polarform \rightarrow Parameterform:

$$x(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(\varphi) = \dot{r}(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi$$

$$y(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{y}(\varphi) = \dot{r}(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi$$

$$\begin{aligned} s &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\dot{x}(\varphi)^2 + \dot{y}(\varphi)^2} d\varphi \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\dot{r}^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi + \dot{r}^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi} d\varphi \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\dot{r}^2(\varphi) + r^2(\varphi)} d\varphi \end{aligned}$$

Beispiel 5.3

Bogenlänge von $K = \{(\varphi/\pi, \varphi) : 0 \leq \varphi < 4\pi\}$

$$r(\varphi) = \varphi/\pi \quad \Rightarrow \quad \dot{r}(\varphi) = 1/\pi$$

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{4\pi} \sqrt{\frac{1}{\pi^2} + \frac{\varphi^2}{\pi^2}} d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{4\pi} \sqrt{1 + \varphi^2} d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\varphi}{2} \sqrt{1 + \varphi^2} + \frac{1}{2} \ln(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2}) \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left(2\pi \sqrt{1 + 16\pi^2} + \frac{1}{2} \ln(4\pi + \sqrt{1 + 16\pi^2}) \right) - 0 \right\} \\ &\doteq 25.726 \end{aligned}$$

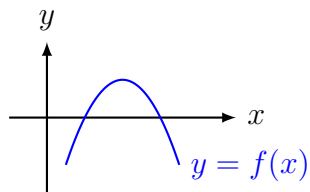
check: $\text{fnInt}(\sqrt{X^2/\pi^2 + 1/\pi^2}, X, 0, 4\pi) \rightarrow 25.726$ (ok)

6 Flächenberechnungen

6.1 Durch Nullstellen begrenzte Flächen

Beispiel 1

Wie gross ist der Inhalt der endlichen Fläche, die von der x -Achse und dem Graphen der Funktion $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ eingeschlossen wird?



Nullstellen:

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 \quad || \cdot (-1)$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 3$$

Hauptsatz:

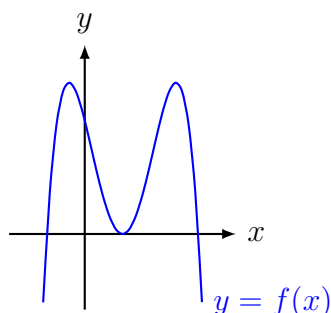
$$A = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x \right]_1^3$$

$$\stackrel{*}{=} (-9 + 18 - 9) - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3 \right) = \frac{4}{3}$$

* oder: `fnInt(-X^2+4X-3,X,1,3)►Frac`

Beispiel 2

Wie gross ist der Inhalt der endlichen Fläche, die von der x -Achse und dem Graphen der Funktion $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x + 3$ eingeschlossen wird?



Nullstellen:

$$\begin{aligned} -x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = 0 &\stackrel{\text{TR}}{\Rightarrow} x_1 = 3 \\ &x_2 = x_3 = 1 \quad (*) \\ &x_4 = -1 \end{aligned}$$

(*) Der TI-84 Plus kann Doppellösungen nicht immer exakt berechnen, so dass man die genauen Lösungen schätzen und zur Kontrolle in die Gleichung einsetzen muss.

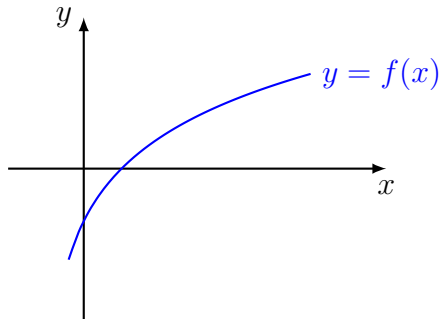
$$\begin{aligned} \text{Hauptsatz: } \int_{-1}^3 (-x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x + 3) dx \\ = \left[-\frac{1}{5}x^5 + x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_{-1}^3 = \frac{128}{15} \end{aligned}$$

Beachte, dass die Integration an der doppelten Nullstelle $x_2 = x_3 = 1$ nicht unterbrochen werden muss, da der Graph die x -Achse nur berührt und somit keine negativen Flächenanteile entstehen.

6.2 Flächen unterhalb der Abszisse

Beispiel 3

Berechne den Inhalt der Fläche, die durch die beiden Koordinatenachsen und den Graphen der Funktion $f(x) = \ln(x + \frac{1}{2})$ eingeschlossen wird. Gib das exakte Resultat an.



Nullstelle(n):

$$\ln(x + \frac{1}{2}) = 0$$

$$e^{\ln(x + \frac{1}{2})} = e^0$$

$$x + \frac{1}{2} = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Hauptsatz:

$$\begin{aligned} \int_0^{0.5} \ln(x + 0.5) dx &= [(x + 0.5)(\ln|x + 0.5| - 1)]_0^{0.5} \\ &= 1 \cdot (\ln(1) - 1) - 0.5 \cdot (\ln(0.5) - 1) = -1 - 0.5 \ln(0.5) + 0.5 \\ &= \underbrace{-0.5 - 0.5 \ln(0.5)}_{\text{als exakte Lösung ok}} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(2^{-1}) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln(2) \\ &= \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\ln(2) - 1) \end{aligned}$$

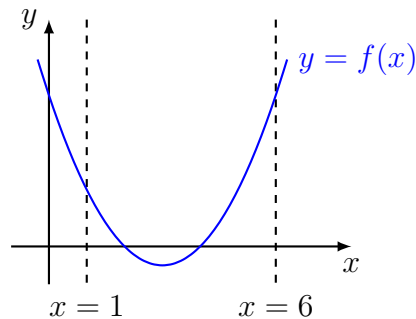
Aufgrund der Vorzeichenregeln für bestimmte Integrale, ist der berechnete Wert negativ. Also beträgt der Flächeninhalt exakt $A = \frac{1}{2}(1 - \ln(2))$.

Man hätte dieses Resultat auch direkt durch Vertauschen der oberen und unteren Grenze erhalten können.

6.3 Willkürliche Grenzen

Beispiel 4

Welchen Inhalt hat die Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$, der x -Achse und die Geraden $x = 0$ bzw. $x = 6$ eingeschlossen wird?



Falls man am Flächeninhalt interessiert ist, muss man etappenweise integrieren und positive bzw. negative Flächenstücke einzeln integrieren.

$$\begin{aligned} \text{Nullstellen: } \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 &= 0 \quad || \cdot 2 \\ x^2 - 6x + 8 &= 0 \\ (x - 2)(x - 4) &= 0 \\ x_1 &= 2 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

$$I_1 = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 \right) dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x \right]_1^2 = \frac{2}{3}$$

$$I_2 = \int_2^4 \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 \right) dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x \right]_2^4 = -\frac{2}{3}$$

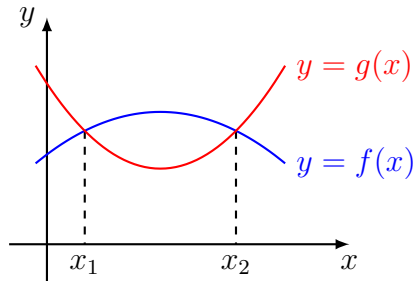
$$I_3 = \int_4^6 \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x \right]_4^6 = \frac{10}{3}$$

$$A = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{10}{3} = \frac{14}{3} \text{ FE} \quad (\text{Die Beträge der Integrale addieren.})$$

6.4 Flächen zwischen zwei sich schneidenden Kurven

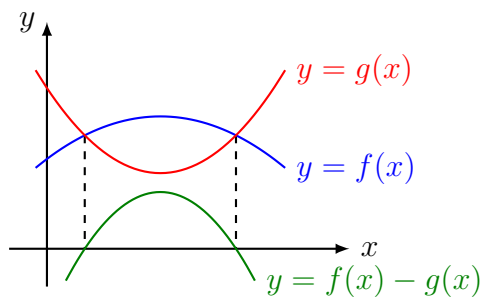
Beispiel 5

Berechne den Inhalt der Fläche, die von den Graphen von $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{19}{8}$ und $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{17}{4}$ eingeschlossen wird.



$$\text{Naiv: } A = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \, dx - \int_{x_1}^{x_2} g(x) \, dx$$

$$\text{Eleganter: } A = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)] \, dx \text{ („toter Walfisch“)}$$



Schnittstellen:

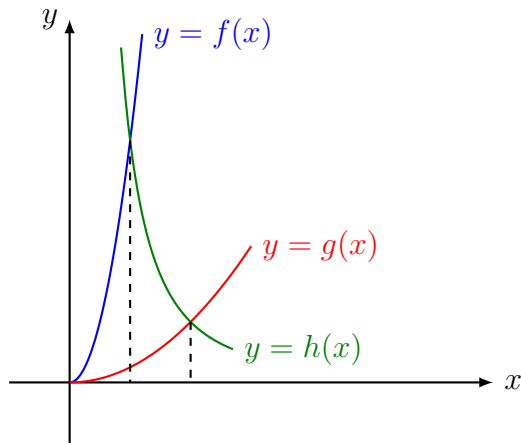
$$\begin{aligned} -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{19}{8} &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{17}{4} \quad || \cdot 8 \\ -x^2 + 6x + 19 &= 2x^2 - 12x + 34 \\ 0 &= 3x^2 - 18x + 15 \\ 0 &= x^2 - 6x + 5 \\ 0 &= (x - 1)(x - 5) \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_1^5 [f(x) - g(x)] \, dx \\ &= \int_1^5 \left[\left(-\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{19}{8} \right) - \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{17}{4} \right) \right] \, dx \\ &= \int_1^5 \left[-\frac{3}{8}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{15}{8} \right] \, dx = \left[-\frac{1}{8}x^3 + \frac{9}{8}x^2 - \frac{15}{8}x \right]_1^5 = 4 \end{aligned}$$

6.5 Aufwändigere Flächenberechnungen

Beispiel 6

Berechne den Inhalt der endlichen Fläche, die im 1. Quadranten von den Graphen der Funktionen $f(x) = 4x^2$, $g(x) = \frac{1}{4}x^2$ und $h(x) = 4x^{-2}$ begrenzt wird.



Schnittstellen:

$$4x^2 = \frac{4}{x^2} \quad || : 4, \cdot x^2$$

$$x^4 = 1$$

$$x = 1 \quad (\text{Im 1. Quadranten gilt } x \geq 0)$$

Schnittstelle zwischen g und h:

$$\frac{1}{4}x^2 = \frac{4}{x^2} \quad || \cdot 4, \cdot x^2$$

$$x^4 = 16$$

$$x = 2 \quad (\text{Im 1. Quadranten gilt } x \geq 0)$$

$$I_1 = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 4x^2 dx = \left[\frac{4}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^2 h(x) dx = \int_1^2 \frac{4}{x^2} dx = 4 \int_1^2 x^{-2} dx \\ &= 4 [-x^{-1}]_1^2 = 4 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1} \right) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^2 g(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{4}x^2 dx = \frac{1}{4} \int_0^2 x^2 dx \\ &= \frac{1}{12} [x^3]_0^2 = \frac{1}{12} (8 - 0) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$A = I_1 + I_2 - I_3 = \frac{4}{3} + 2 - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$$

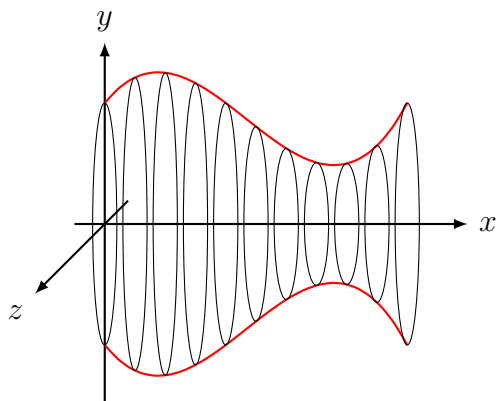
7 Volumen und Oberfläche von Rotationskörpern

Rotationskörper

Rotationskörper sind Körper, die durch Drehung einer geeigneten Kurve um eine der Koordinatenachsen entstehen.

Volumen

Das Volumen eines Rotationskörpers lässt sich als Grenzwert einer Summe aus Zylindern auffassen, deren Radien Funktionswerte sind und deren Höhen gegen Null streben.

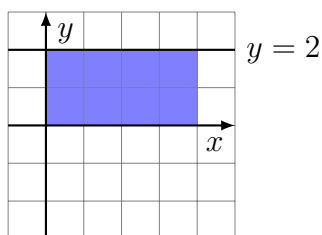


Aus $dV = \pi r^2 dx = \pi f(x)^2 dx$ folgt:

$$V = \int_V dV = \int_a^b \pi f^2(x) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Beispiel 7.1

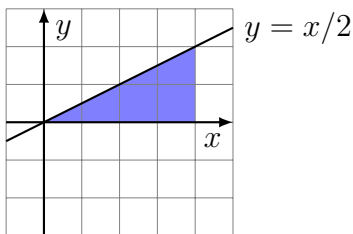
Der Graph der Funktion $f(x) = 2$ rotiert für $0 \leq x \leq 4$ um die x -Achse. Berechne das Volumen des Rotationskörpers.



$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx = \pi \int_0^4 2^2 dx = \pi [4x]_0^4 = 16\pi \text{ VE}$$

Beispiel 7.2

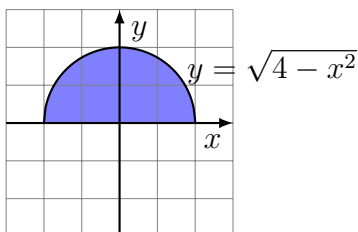
Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x$ rotiert für $0 \leq x \leq 4$ um die x -Achse. Berechne das Volumen des Rotationskörpers.



$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_a^b f(x)^2 dx = \pi \int_0^4 \frac{1}{4} x^2 dx \\
 &= \pi \left[\frac{1}{12} x^3 \right]_0^4 = \frac{64}{12} \pi = \frac{16}{3} \pi \text{ VE}
 \end{aligned}$$

Beispiel 7.3

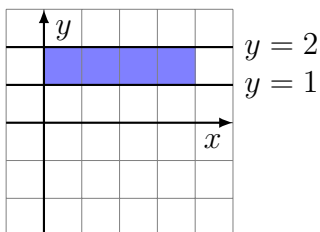
Der Graph von $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ rotiert um die x -Achse. Berechne das Volumen des Drehkörpers.



$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_a^b f(x)^2 dx = \pi \int_{-2}^2 (4-x^2) dx \\
 &= 2\pi \int_0^2 (4-x^2) dx = 2\pi \left[4x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 = \frac{32}{3} \pi \text{ VE}
 \end{aligned}$$

Beispiel 7.4

Die Fläche zwischen den Graphen der Funktionen $f(x) = 2$ und $g(x) = 1$ über dem Intervall $I = [0, 4]$ rotiert um die x -Achse. Berechne das Volumen des Hohlzylinders.



$$V = \pi \int_0^4 2^2 dx - \pi \int_0^4 1^2 dx = \pi [4x]_0^4 - \pi [x]_0^4 = 16\pi - 4\pi = 12\pi$$

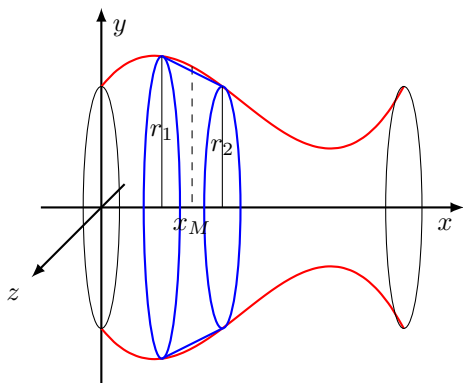
Warnung

Bei Hohlkörpern dürfen die Randfunktionen nicht vor dem Quadrieren subtrahiert werden.

$$V = \pi \int_0^4 (2-1)^2 dx - \pi \int_0^4 1 dx = \pi [x]_0^4 = 4\pi - 0\pi = 4\pi$$

Mantelfläche

Die Mantelfläche eines Rotationskörpers lässt sich als Grenzwert einer Summe aus Kegelmanteln auffassen, deren Radien Funktionswerte sind und deren Höhen gegen Null streben.



Formel für die Mantelfläche eines geraden Kreiskegels:

$$M = \pi(r_1 + r_2)m$$

Auf den Mantel eines geraden Kreiskegels mit der Höhe dx angewendet

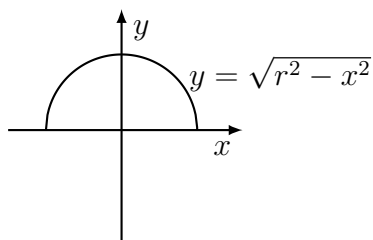
$$\begin{aligned} dM &= \pi 2f(x_M) \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= 2\pi f(x_M) \sqrt{\frac{dx^2}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2}} dx \\ &= 2\pi f(x_M) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \end{aligned}$$

... und über die gesamte Mantelfläche integriert:

$$M = \int_M dM = 2\pi \int_a^b f(x_M) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Beispiel 7.5

Der Halbkreis $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ mit Mittelpunkt $M(0, 0)$ und Radius r rotiert um die x -Achse. Berechne die Oberfläche des Drehkörpers.



$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx \\ &= 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \frac{|r|}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 4\pi r [x]_0^r = 4\pi r^2 \end{aligned}$$

8 Die Partialbruchzerlegung

Beispiel 8.1

$$\frac{2x+1}{x^2+3x-10} = \frac{2x+1}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5} \quad || \cdot (x-2)(x+5)$$

$$2x+11 = A(x+5) + B(x-2)$$

$$2x+1 = Ax+5A+Bx-2B$$

$$2x+1 = (A+B)x + (5A-2B)$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} A+B &= 2 \\ 5A-2B &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} A &= 5/7 \\ B &= 9/7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{x^2+3x-10} dx &= \frac{1}{7} \left[\int \frac{5}{x-2} dx + \int \frac{9}{x+5} dx \right] \\ &= \frac{1}{7} [5 \ln|x-2| + 9 \ln|x+5|] + C \end{aligned}$$

Beispiel 8.2

$$\frac{2x+1}{x^2+4x+4} = \frac{2x+1}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+2} \quad || \cdot (x+2)$$

$$2x+1 = A(x+2) + B(x+2)$$

$$2x+1 = (A+B)x + 2(A+B)$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} A+B &= 2 \\ 2(A+B) &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

Neuer Ansatz:

$$\frac{2x+1}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} \quad || \cdot (x+2)^2$$

$$2x+1 = A(x+2) + B$$

$$2x+1 = Ax + (2A+B)$$

$$A = 2$$

$$2A+B = 1 \Rightarrow B = -3$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{x^2+4x+4} dx &= \int \frac{2}{x+2} dx - \int \frac{3}{(x+2)^2} dx \\ &= 2 \ln|x+2| + 3(x+2)^{-1} + C \end{aligned}$$

Beispiel 8.3

$$\frac{x-5}{x^3-5x^2+9x-5} = \frac{x-5}{(x-1)(x-[2+i])(x-[2-i])}$$

$$\frac{x-5}{(x-1)(x^2-4x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-4x+5} \quad || \cdot \text{HN}$$

$$x-5 = A(x^2-4x+5) + (Bx+C)(x-1)$$

$$x-5 = Ax^2 - 4Ax + 5A + Bx^2 - Bx + Cx - C$$

$$x-5 = (A+B)x^2 + (-4A-B+C)x + (5A-C)$$

$$\begin{array}{rcl} A+B=0 & & A=-2 \\ -4A-B+C=1 & \Rightarrow & B=2 \\ 5A-C=-5 & & C=-5 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \int \frac{x-5}{(x-1)(x^2-4x+5)} dx \\ &= - \int \frac{2}{-x-1} dx + \int \frac{2x-5}{x^2-4x+5} dx \\ &= -2 \ln|x-1| + \ln|x^3-4x+5| - \arctan(x-2) + C \end{aligned}$$

Zusammenfassung

Jede gebrochen rationale Funktion

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

mit reellen Koeffizienten kann durch Polynomdivision auf die Form

$$f(x) = g(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

gebracht werden, wobei $g(x)$ ein ganzrationales Polynom ist und $\text{Grad}(p) < \text{Grad}(q)$ gilt.

Der Nenner $q(x)$ lässt sich in \mathbb{C} bis auf einen konstanten Faktor, der zum Zähler gerechnet werden kann, in ein Produkt von Linearfaktoren zerlegen.

$$q(x) = (x - x_1)^{r_1} (x - x_2)^{r_2} \dots (x - x_k)^{r_k} \\ (x - z_1)^{s_1} (x - \bar{z}_1)^{s_1} \dots (x - z_\ell)^{s_\ell} (x - \bar{z}_\ell)^{s_\ell}$$

Die Paare konjugiert komplexer Linearfaktoren lassen sich als irreduzible Polynome 2. Grades mit reellen Koeffizienten darstellen.

$$(x - z_i)(x - \bar{z}_i) = x^2 - (z_i + \bar{z}_i)x + z_i\bar{z}_i = x^2 + a_i x + b_i$$

Damit:

$$q(x) = (x - x_1)^{r_1} (x - x_2)^{r_2} \dots (x - x_k)^{r_k} \\ = (x + a_1 x + b_1)^{s_1} (x + a_2 x + b_2)^{s_2} \dots (x + a_\ell x + b_\ell)^{s_\ell}$$

Jede echt gebrochen rationale Funktion $\frac{p(x)}{q(x)}$ lässt sich in folgender Form darstellen:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{1r_1}}{(x - x_1)^{r_1}} \\ + \frac{A_{21}}{x - x_2} + \frac{A_{22}}{(x - x_2)^2} + \dots + \frac{A_{2r_2}}{(x - x_2)^{r_2}} \\ + \dots \\ + \frac{A_{k1}}{x - x_k} + \frac{A_{k2}}{(x - x_k)^2} + \dots + \frac{A_{kr_k}}{(x - x_k)^{r_k}} \\ + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + a_1x + b_1} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2 + a_1x + b_1)^2} + \dots + \frac{B_{1s_1}x + C_{1s_1}}{(x^2 + a_1x + b_1)^{s_1}} \\ + \frac{B_{21}x + C_{21}}{x^2 + a_2x + b_2} + \frac{B_{22}x + C_{22}}{(x^2 + a_2x + b_2)^2} + \dots + \frac{B_{2s_2}x + C_{2s_2}}{(x^2 + a_2x + b_2)^{s_2}} \\ + \dots \\ + \frac{B_{\ell 1}x + C_{\ell 1}}{x^2 + a_\ell x + b_\ell} + \frac{B_{\ell 2}x + C_{\ell 2}}{(x^2 + a_\ell x + b_\ell)^2} + \dots + \frac{B_{\ell s_\ell}x + C_{\ell s_\ell}}{(x^2 + a_\ell x + b_\ell)^{s_\ell}}.$$

Ist der Nenner eines Partialbruches eine Potenz eines Linearfaktors, so ist der Zähler eine Konstante A . Ist der Nenner eine Potenz eines irreduziblen Polynoms zweiten Grades, so ist sein Zähler ein lineares Polynom $Bx + C$.