Aufgabe 9.1

Gegeben: Gebiet $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 5 - 2x\}$

Skizziere G und bestimme $\displaystyle\iint_G 30x^2y \,\mathrm{d}G$

Aufgabe 9.2

Die Graphen der Funktionen $y = x^2$ und $x = y^2$ begrenzen ein endliches Gebiet G.

Berechne $\displaystyle\iint_G \frac{x}{y} \,\mathrm{d}G$.

Aufgabe 9.3

G sei das Parallelogramm mit den Eckpunkten $A(2, 1)$, $B(4, 2)$, $C(4, 5)$ und $D(2, 4)$.

Stelle $\displaystyle\iint_G f(x, y) \,\mathrm{d}G$ so dar, dass

(a) zuerst nach y und dann nach x,

(b) zuerst nach x und dann nach y

integriert wird.

Aufgabe 9.4

Berechne den Flächenschwerpunkt des endlichen Gebiets das durch die Kurven $y = x^2$ und $y = x$ eingeschlossen wird.

Aufgabe 9.5

Berechne die Masse des Einheitswürfels

$$V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x, y, z \leq 1\}$$

bei der Dichteverteilung $\varrho(x, y, z) = 1 + x + y + z$ mit $[\varrho] = 1\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

Aufgabe 9.6

Forme das Integral $\displaystyle\int_0^6 \int_2^4 \int_1^3 x^2yz^3 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ um, damit die Rechnung einfacher wird.

Aufgabe 9.7

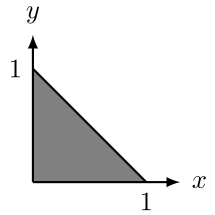
V ist das Volumen des Tetraeders mit den Ecken $O(0,0,0)$, $A(4,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,5)$.
Stelle $\iiint_V \mathrm{d}V$ so dar, dass zuerst nach z, dann nach y und dann nach x integriert wird.
Die Berechnung des Integrals ist nicht verlangt.

Aufgabe 9.8

Integriere die Funktion $f(x,y) = xy^2$ über dem Rechteck mit den Ecken $(-1,-2)$, $(3,-2)$, $(3,2)$ und $(-1,2)$.

Aufgabe 9.9

Die Abbildung zeigt den Querschnitt eines elektrischen Leiters, der senkrecht von der ortsabhängigen Stromdichte $S(x,y) = kx^2y^2$ durchflossen wird (k: positive Konstante).



Berechne den durch den Leiterquerschnitt A fliessenden Strom I, wenn definitionsgemäss

$$I = \iint_A S(x,y)\,\mathrm{d}A$$

gilt.

Aufgabe 9.10

Skizziere $G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 4,\ y^2 \le x\right\}$ und berechne $\iint_G (5x + 2y)\,\mathrm{d}G$.

Aufgabe 9.11

Berechne den Schwerpunkt des Gebiets $G = \{(x,y) \mid 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \sin x\}$.

Aufgabe 9.12

Der Quader $K = \{(x,y,z) \mid -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3,\ 0 \le z \le 2\}$ mit der konstanten Dichte ϱ rotiert um die z-Achse. Berechne das Massenträgheitsmoment J, das in diesem Fall durch

$$J = \varrho \iiint_K (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}K$$

definiert ist.