Aufgabe 8.1

$$\frac{7x+1}{x^2+x-6} = \frac{7x+1}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x+3)}$$

$$\begin{aligned} 7x+1 &= A(x+3) + B(x-2) \\ 7x+1 &= Ax + 3A + Bx - 2B \\ 7x+1 &= (A+B)x + (3A-2B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A+B &= 7 \\ 3A-2B &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= 3 \\ B &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{7x+1}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{3}{x-2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{4}{x+3}\,\mathrm{d}x \\ &= 3\ln|x-2| + 4\ln|x+3| + C \end{aligned}$$

Aufgabe 8.2

$$\frac{x^2+3}{x^3-4x^2+3x} = \frac{x^2+3}{x(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-3} \qquad || \cdot \mathrm{HN}$$

$$x^2+3 = A(x-1)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-1)$$

$$x^2+3 = Ax^2 - 4Ax + 3A + Bx^2 - 3Bx + Cx^2 - Cx$$

$$x^2+3 = (A+B+C)x^2 + (-4A-3B-C)x + 3A$$

$$\begin{aligned} A+B+C &= 1 \\ -4A-3B-C &= 0 \\ 3A &= 3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= 1 \\ B &= -2 \\ C &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+3}{x^3-4x^2+3x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{2}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x-3}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln|x| - 2\ln|x-1| + 2\ln|x-3| + C \end{aligned}$$

Aufgabe 8.3

$$\frac{x^2+x}{x^3-9x^2+27x-27} = \frac{x^2+x}{(x-3)^3}$$

Der TI-84+ ist bei mehrfachen Nullstellen meist ungenau. Die Zahlen lassen aber ganzzahlige Lösungen vermuten, was mit dem Horner-Schema leicht überprüft werden kann.

$$\frac{x^2+x}{(x-3)^3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{C}{(x+3)^3} \quad || \cdot \text{HN}$$

$$\begin{aligned}
x^2+x &= A(x-3)^2 + B(x-3) + C \\
x^2+x &= Ax^2 - 6Ax + 9A + Bx - 3B + C \\
x^2+x &= Ax^2 + (-6Ax + Bx) + (9A - 3B + C)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= 1 & & & A &= 1 \\
-6A + B &= 1 & &\Rightarrow & B &= 7 \\
9A - 3B + C &= 0 & & & C &= 12
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^2+x}{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x + \int \frac{7}{(x-3)^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{12}{(x-3)^3}\,\mathrm{d}x \\
&= \ln|x-3| - \frac{7}{x-3} - \frac{6}{(x-3)^2} + C
\end{aligned}$$

Aufgabe 8.4

Da der Grad des Zählerpolynoms (3) grösser als der Grad des Nennerpolynoms (2) ist, muss zuerst der ganzrationale Anteil des Quotienten durch Polynomdivision bestimmt werden:

```
                                                          6x
 (x^3 + 0x^2 + 3x + 2) : (x^2 + x - 2) = x - 1 + -------
-(x^3 +  x^2 - 2x)                                x^2+x-2
 -----------------
        -x^2 + 5x + 2
      -(-x^2 -  x + 2)
       ---------------
             + 6x
```

Partialbruchzerlegung mit dem echt gebrochen rationalen Teil:

$$\frac{6x}{x^2+x-2} = \frac{6x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-2)} \quad || \cdot \text{HN}$$

$$\begin{aligned}
6x &= A(x+2) + B(x-1) \\
6x &= (A+B)x + (2A - B)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A + B &= 6 & &\Rightarrow & A &= 2 \\
2A - 3B &= 0 & & & B &= 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3+3x+2}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x &= \int (x-1)\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{4}{x-2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}x^2 - x + 2\ln|x-1| + 4\ln|x-2| + C
\end{aligned}$$

Aufgabe 8.5

$$\frac{2x-3}{6x^2-5x+1} = \underbrace{\frac{2x-3}{6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)}}_{\text{A}} = \underbrace{\frac{2x-3}{(3x-1)(2x-1)}}_{\text{B}}$$

Wer nicht gerne mit Brüchen rechnet, soll die Darstellung B verwenden. Dafür muss er bei der späteren Integration die Kettenregel beachten. Bei Form A verhält es sich umgekehrt.

Variante A:

$$\frac{2x-3}{(3x-1)(2x-1)} = \frac{A}{3x-1} + \frac{B}{2x-1}$$

$$2x-3 = A(2x-1) + B(3x-1)$$

$$2x-3 = (2A+3B)x + (-A-B)$$

$$\begin{aligned} 2A+3B &= 2 \\ -A-B &= -3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= 7 \\ B &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-3}{6x^2-5x+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{7}{3x-1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{4}{2x-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{7}{3}\ln|3x-1| - 2\ln|2x-1| + C \end{aligned}$$

Variante B: (der Faktor $\frac{1}{6}$ wird vorerst beidseits weggelassen)

$$\frac{2x-3}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)} = \frac{A}{x-\frac{1}{2}} + \frac{B}{x-\frac{1}{3}} \qquad || \cdot \text{HN}$$

$$2x-3 = A\left(x-\tfrac{1}{3}\right) + B\left(x-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$2x-3 = \left(A+B\right)x + \left(-\tfrac{1}{3}A - \tfrac{1}{2}B\right)$$

$$\begin{aligned} A+B &= 2 \\ -\tfrac{1}{3}A - \tfrac{1}{2}B &= -3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A+B &= 2 \\ 2A+3B &= 18 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= -12 \\ B &= 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-3}{6x^2-5x+1}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{6}\int \frac{12}{x-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{6}\int \frac{14}{x-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{7}{3}\ln\left|x-\tfrac{1}{3}\right| - 2\ln\left|x-\tfrac{1}{2}\right| + D \end{aligned}$$

Wer sich wundert, weshalb die beiden Lösungen verschieden aussehen, soll in Lösung A in den Numeri die Faktoren 3 bzw. 2 ausklammern und Logarithmengesetze anwenden.

Aufgabe 8.6

Nullstellen des Nenners: $x_1 = 2$, $x_2 = \mathrm{i}$, $x_3 = -\mathrm{i}$

$(x-x_2)(x-x_3) = (x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i}) = x^2+1$

$$\frac{3x^2+x+1}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \quad || \cdot \text{HN}$$

$$\begin{aligned}
3x^2+x+1 &= A(x^2+1) + (Bx+C)(x-2) \\
3x^2+x+1 &= Ax^2 + A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C \\
3x^2+x+1 &= (A+B)x^2 + (-2B+C)x + (A-2C)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A+B &= 3 & & A = 3 \\
-2B+C &= 1 & \Rightarrow \quad & B = 0 \\
A-2C &= 1 & & C = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2+x+1}{x^3-2x^2+x-2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{3}{x-2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= 3\ln|x-2| + \arctan(x) + C
\end{aligned}$$

Aufgabe 8.7

Nulltellen des Nenners: $x_1 = 3+2\mathrm{i}$, $x_2 = 3-2\mathrm{i}$, $x_3 = -1$

irreduzibles Polynom durch Ausmultipliziren bestimmen:
$(x-x_1)(x-x_2) = (x-[3+2\mathrm{i}])(x-[3-2\mathrm{i}]) = \cdots = x^2-6x+13$

irreduzibles Polynom indirekt via Horner-Schema bestimmen:

x		-5	7	13
-1	1	-6	13	0

$$\frac{x-4}{(x+1)(x^2-6x+13)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-6x+13}$$

$$\begin{aligned}
x-4 &= A(x^2-6x+13) + (Bx+C)(x+1) \\
x-4 &= Ax^2 - 6Ax + 13A + Bx^2 + Bx + Cx + C \\
x-4 &= (A+B)x^2 + (-6A+B+C)x + (13A+C)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A+B &= 0 & & A = -\tfrac{1}{4} \\
-6A+B+C &= 1 & \Rightarrow \quad & B = \tfrac{1}{4} \\
13A+C &= -4 & & C = -\tfrac{3}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x-4}{x^3-5x^2+7x+13}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \frac{x-3}{x^2-6x+13}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{8}\ln|x^2-6x+13| + C
\end{aligned}$$

Aufgabe 8.8

Nulltellen des Nenners: $x_1 = 2$ $x_2 = 1+\mathrm{i}$, $x_3 = 1-\mathrm{i}$

irreduzibles Polynom durch Ausmultiplizieren bestimmen:

$(x - x_2)(x - x_3) = (x - [1 + \mathrm{i}])(x - [1 - \mathrm{i}]) = \cdots = x^2 - 2x + 2$

oder via Horner-Schema:

$$\begin{array}{c|c|ccc} x & & -4 & 6 & -4 \\ \hline 2 & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\frac{x^2}{(x-2)(x^2-2x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+2}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= A(x^2-2x+2) + (Bx+C)(x-2) \\ x^2 &= Ax^2 - 2Ax + 2A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C \\ x^2 &= (A+B)x^2 + (-2A-2B+C)x + (2A-2C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A + B &= 1 & & & A &= 2 \\ -2A - 2B + C &= 0 & &\Rightarrow & B &= -1 \\ 2A - 2C &= 0 & & & C &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int \frac{x^2}{x^3 - 4x^2 + 6x - 4}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-x+2}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2| + \arctan(x-1) + C \end{aligned}$$

Aufgabe 8.9

TI-84+: $x_1 = -2 \qquad x_2 = \mathrm{i} \qquad x_6 = 1$

$x_3 = -\mathrm{i} \qquad x_7 = 1$

$x_4 = \mathrm{i} \qquad x_8 = 1$

$x_5 = -\mathrm{i}$

$(x - x_2)(x - x_3) = (x - x_4)(x - x_5) = (x - \mathrm{i})(x + \mathrm{i}) = x^2 + 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+2)(x-1)^3(x^2+1)^2} = &\frac{A_{11}}{x+2} \\ &+ \frac{A_{21}}{x-1} + \frac{A_{22}}{(x-1)^2} + \frac{A_{23}}{(x-1)^3} \\ &+ \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+1} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$