Aufgabe 8.1

$$\begin{aligned}\frac{4x^5+3x+7}{x^3(x-5)(x^2-5x+7)^2} &= \frac{A_{11}}{x}+\frac{A_{12}}{x^2}+\frac{A_{13}}{x^3}\\ &+\frac{A_{21}}{x-5}\\ &+\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2-5x+7}+\frac{B_{12}x+C_{12}}{(x^2-5x+7)^2}\end{aligned}$$

Aufgabe 8.2

$x^5-15x^3+10x^2+60x-72=0$

Lösung	Taschenrechner	Vermutung
x_1	$-3+6.66\cdot 10^{-7}\,\mathrm{i}$	-3
x_2	$-3-6.66\cdot 10^{-7}\,\mathrm{i}$	-3
x_3	$2.000043+7.53\cdot 10^{-5}\,\mathrm{i}$	2
x_4	$2.000043-7.53\cdot 10^{-5}\,\mathrm{i}$	2
x_5	1.999913	2

Überprüfung der Lösungen mit dem Hornerschema:

x_0						
		0	-15	10	60	-72
2	1	2	-11	-12	36	0
2	1	4	-3	-18	0	
2	1	6	9	0		
-3	1	3	0			
-3	1	0				

Hinweis: Das Hornerschema ist nur ein effizientes Verfahren, um eine Polynomdivision durch einen einzelnen *Linearfaktor* $(x-x_0)$ durchzuführen.

Aufgabe 8.3

$x_1=4$, $x_2=3\mathrm{i}$, $x_3=-3\mathrm{i}$, $x_4=1+2\mathrm{i}$, $x_5=1-2\mathrm{i}$

$(x-4)$ irreduzibel in $\mathbb{R}$

$(x-3\mathrm{i})(x+3\mathrm{i})=(x^2+9)$ irreduzibel in $\mathbb{R}$

$(x-[1+2\mathrm{i}])(x+[1-2\mathrm{i}])=(x^2-2x+5)$ irreduzibel in $\mathbb{R}$

Insgesamt:

$x^5-6x^4+22x^3-74x^2+117x-180=(x-1)(x^2+9)(x^2-2x+5)$

Aufgabe 8.4

```
                                                                          x - 6
 (x^4 + 5x^3        + 2x - 1) : (x^2 - x + 1) = x^2 + 6x + 5 + -----------
-(x^4 -  x^3 +  x^2)                                             x^2 - x + 1
 ------------------
        6x^3 -  x^2 + 2x
      -(6x^3 - 6x^2 + 6x)
       ------------------
               5x^2 - 4x - 1
             -(5x^2 - 5x + 5)
              ---------------
                       x - 6
```

Aufgabe 8.5

(a) $$\frac{2}{x+1}+\frac{4}{x-4}-\frac{1}{x} = \frac{2(x-4)x+4(x+1)x-(x+1)(x-4)}{(x+1)(x-4)x}$$
$$= \frac{2(x^2-4x)+4(x^2+x)-(x^2-3x-4)}{(x+1)(x-4)x}$$
$$= \frac{2x^2-8x+4x^2+4x-x^2+3x+4}{(x+1)(x-4)x}$$
$$= \frac{5x^2-x+4}{(x+1)(x-4)x}$$

(b) $$\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x-2}+\frac{5}{x-2}=\frac{7}{x-2}$$

(c) $$\frac{3}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x-2)^3} = \frac{3(x-2)^2-(x-2)+1}{(x-2)^3}$$
$$= \frac{3x^2-12x+12-x+2+1}{(x-2)^3}$$
$$= \frac{3x^2-13x+15}{(x-2)^3}$$

Aufgabe 8.6

$$\frac{4x^2+3x-1}{2x^3-3x^2+8x-12} = \frac{4x^2+3x-1}{2\big(x-\frac{3}{2}\big)\big(x^2+4\big)} = \frac{4x^2+3x-1}{(2x-3)\big(x^2+4\big)}$$

$$\frac{4x^2+3x-1}{(2x-3)\big(x^2+4\big)} = \frac{A}{2x-3}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$4x^2+3x-1 = A(x^2+4)+(Bx+C)(2x-3)$$
$$4x^2+3x-1 = (A+2B)x^2+(-3B+2C)x+4A-3C$$

$$\begin{array}{rcl} A+2B=4 & & A=2 \\ -3B+2C=3 & \Rightarrow & B=1 \\ 4A-3C=-1 & & C=3 \end{array}$$

Aufgabe 8.7

Der Grad des Zählers ist nicht kleiner als der des Nenners:

```
                                                  6x - 27
 (2x^2 - 2x -  1) : (x^2 - 4x + 13) = 2 + -------------
-(2x^2 - 8x + 26)                         x^2 - 4x + 13
 ----------------
         6x - 27
```

Nullstellen des Nenners: $x_1 = 2 + 3\mathrm{i}$, $x_2 = 2 - 3\mathrm{i}$

Das Nennerpolynom ist irreduzibel und eine Partialbruchzerlegung ist hinfällig.

$$\int \frac{2x^2 - 2x - 1}{x^2 - 4x + 13}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int 2\,\mathrm{d}x + \int \frac{6x - 27}{x^2 - 4x + 13}\,\mathrm{d}x$$
$$= 2x + \frac{6}{2}\ln|x^2 - 4x + 13| + \frac{-27 + 24/2}{\sqrt{13 - 16/4}}\arctan\frac{x-2}{3} + C$$
$$= 2x + 3\ln|x^2 - 4x + 13| - 5\arctan\frac{x-2}{3} + C$$

Aufgabe 8.8

$$\frac{x-1}{x^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3}$$
$$x - 1 = Ax^2 + Bx + C$$

$A = 0$
$B = 1$
$C = -1$

Somit gilt: $\dfrac{x-1}{x^3} = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}$

… was man natürlich auch direkt hätte berechnen können.