Aufgabe 3.1

$$\int_0^1 \sqrt{3x+1}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = 3x+1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,\mathrm{d}u$

Grenzen: $u(0) = 1,\ u(1) = 4$

$$\ldots = \int_1^4 \sqrt{u}\cdot\frac{1}{3}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int_1^4 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^4 = \frac{1}{3}\left[\frac{16}{3} - \frac{2}{3}\right] = \frac{14}{9}$$

Aufgabe 3.2

$$\int x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Substitution: $u = x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\mathrm{d}u$

$$\ldots = \int x\,\mathrm{e}^u\cdot\frac{1}{2x}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^u\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^u = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{(x^2)} + C$$

Aufgabe 3.3

$$\int \frac{4\cdot\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$

Substitution: $u = \ln|x| \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = x\cdot\mathrm{d}u$

$$\ldots = 4\int \frac{u}{x}\cdot x\,\mathrm{d}u = 4\int u\,\mathrm{d}u = 4\cdot\frac{1}{2}\,u^2 = 2(\ln|x|)^2 + C$$

Aufgabe 3.4

$$\int_{-2}^0 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\,\mathrm{d}x$$

Substitution: $u = -\frac{1}{2}x \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = -2\cdot\mathrm{d}u$

Grenzen: $u(-2) = 1,\ u(0) = 0$

$$\ldots = \int_1^0 \mathrm{e}^u \cdot (-2) \cdot \mathrm{d}u = (-2) \int_1^0 \mathrm{e}^u \mathrm{d}u$$

$$= (-2) \left[\mathrm{e}^u\right]_1^0 = -2(1-\mathrm{e}) = 2\mathrm{e} - 2$$

Aufgabe 3.5

$$\int \ln|5x| \,\mathrm{d}x$$

Substitution: $u = 5x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 5 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \dfrac{1}{5} \cdot \mathrm{d}u$

$$\ldots = \int \ln|u| \cdot \frac{1}{5} \cdot \mathrm{d}u = \frac{1}{5} u(\ln|u| - 1) = x(\ln|5x| - 1) + C$$

Aufgabe 3.6

$$\int (2x-1)^3 \,\mathrm{d}x$$

Substitution: $u = 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}u$

Grenzen: $u(1) = 1$, $u(2) = 3$

$$\ldots = \int_1^3 u^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathrm{d}u = \frac{1}{8} \left[u^4\right]_1^3 = \frac{1}{8}(81 - 1) = 10$$

Aufgabe 3.7

$$\int x^2 \sin(x^3) \,\mathrm{d}x$$

Substitution: $u = x^3 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \dfrac{1}{3x^2}\mathrm{d}u$

$$\ldots = \int x^2 \sin(u) \cdot \frac{1}{3x^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{3} \int \sin(u)\mathrm{d}u = -\frac{1}{3}\cos u + C_u$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(x^3) + C$$

Aufgabe 3.8

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} \,\mathrm{d}x$$

Substitution: $u = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2x}\mathrm{d}u$

Grenzen: $u(0) = 1$, $u(1) = 2$

$$\ldots = \int_1^2 \frac{2x}{u} \cdot \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u = \int_1^2 \frac{1}{u}\mathrm{d}u$$
$$= \big[\ln|u|\big]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

Aufgabe 3.9

$$\int \frac{6}{(4-3x)^2}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

$$u(x) = 4 - 3x \quad \Rightarrow \quad du = -3\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = -\tfrac{1}{3}\,\mathrm{d}u$$

$$\ldots = 6\int \frac{1}{u^2} \cdot \frac{-1}{3}\,\mathrm{d}u = -2\int \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$$
$$= 2\int u^{-1} + C_u = 2\int (4-3x)^{-1} + C$$

Aufgabe 3.10

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t = \ldots$$

$$u(x) = t + 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$

Grenzen: $u(0) = 1$, $u(3) = 4$

$$\ldots = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = 2\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = 2\big[\sqrt{u}\big]_1^4 = 2(2-1) = 2$$

Aufgabe 3.11

$$\int \sqrt[3]{(3x-8)^2}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

$$u(x) = 3x - 8 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = 3\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{d}u$$

$$\ldots = \tfrac{1}{3}\int \sqrt[3]{u^2}\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{3}\int u^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}u$$
$$= \tfrac{3}{3\cdot 5}u^{\frac{5}{3}} + C_u = \tfrac{1}{5}u^{\frac{5}{3}} + C_u = \tfrac{1}{5}(3x-8)^{\frac{5}{3}} + C$$

Aufgabe 3.12

$$\int_0^1 \ln(x^2+1)\mathrm{d}x = \ldots$$

$$u(x) = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u$$

Grenzen: $u(0) = 1$, $u(1) = 2$

$$\ldots = \int_1^2 x \ln|u| \cdot \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln|u|\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\big[u\big(\ln|u|-1\big)\big]_1^2 \frac{1}{2}\big[2(\ln(2)-1)-1(\ln(1)-1)\big] = \frac{1}{2}(2\ln(2)-1) = \ln(2)-\frac{1}{2}$$

Aufgabe 3.13

$$\int x(x^2+1)^2\,\mathrm{d}x = \ldots$$

$$u(x) = x^2+1 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u$$

$$\ldots = \int x\cdot u^2\cdot\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}\int u^2\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{6}(x^2+1)^3 + C$$

Aufgabe 3.14

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

$$u(x) = \mathrm{e}^x - 1 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}u$$

$$\ldots = \int \frac{\mathrm{e}^x}{u}\cdot\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}u = \int\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$$

$$= \ln|u| + C_u = \ln|\mathrm{e}^x-1| + C$$

Aufgabe 3.15

$$\int \frac{\ln\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

$$u(x) = \sqrt{x}+1 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}u$$

$$\ldots = \int\frac{\ln(u)}{\sqrt{x}}\cdot 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}u = 2\int \ln(u)\,\mathrm{d}u$$

$$= 2u(\ln|u|-1) + C_u = 2\big(\sqrt{x}+1\big)\Big(\ln\big|\sqrt{x}+1\big|-1\Big) + C$$

Aufgabe 3.16

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 x \sin x\,\mathrm{d}x = \ldots$$

$$u(x) = \cos x \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}x = \frac{-1}{\sin x}\,\mathrm{d}u$$

$$\ldots = \int u^2 \sin x\cdot\frac{-1}{\sin x}\,\mathrm{d}u = -\int u^2\,\mathrm{d}u = -\tfrac{1}{3}\cos^3 x + C$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi}\cos^2 x\sin x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\big[\cos^3 x\big]_{\pi}^{\pi/2} = \tfrac{1}{3}\big(\cos^3\tfrac{\pi}{2} - \cos^3\pi\big) = \tfrac{1}{3}$$

Aufgabe 3.17 ($\star$)

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

$$u(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u$$

$$\begin{aligned}\ldots &= \int \frac{x}{1+u^2} \cdot \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \tfrac{1}{2}\arctan u + C_u = \tfrac{1}{2}\arctan x^2 + C\end{aligned}$$

Aufgabe 3.18 ($\star$)

$$\int \frac{3+2t}{5+2t}\,\mathrm{d}t = \ldots$$

$$u(t) \overset{(*)}{=} 5+2t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$$

$$\begin{aligned}\ldots &= \tfrac{1}{2}\int \frac{3+2t}{u}\,\mathrm{d}u \overset{(*)}{=} \tfrac{1}{2}\int \frac{3+(u-5)}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \tfrac{1}{2}\int \frac{u-2}{u}\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}\int 1\,\mathrm{d}u - \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \tfrac{1}{2}u - \ln u + C_u = \tfrac{1}{2}(5+2t) - \ln(5+2t) + C\end{aligned}$$

Aufgabe 3.19

$$\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-1}}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

$$u = x^2-x-1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = (2x-1)\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}u$$

$$\begin{aligned}\ldots &= \int \frac{2x-1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}u = \int u^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u \\ &= 2u^{\frac{1}{2}} + C_u = 2\sqrt{x^2-x-1} + C\end{aligned}$$

Aufgabe 3.20

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

$$u(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = x^{-1}\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}u$$

$$\begin{aligned}\ldots &= \int \frac{u^2}{x} \cdot x\,\mathrm{d}u = \int u^2\,\mathrm{d}u \\ &= \tfrac{1}{3}u^3 + C_u = \tfrac{1}{3}\ln^3 x + C\end{aligned}$$

Aufgabe 3.21 ($\star$)

$$\int \sqrt{\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = \dots$$

$x = \ln t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = t^{-1}\,\mathrm{d}t$
$t = \mathrm{e}^x$

$$\begin{aligned}
\dots &= \int \sqrt{\mathrm{e}^{2x}\big(\mathrm{e}^x + 1\big)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \mathrm{e}^x \sqrt{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{\ln t}\sqrt{\mathrm{e}^{\ln t} + 1}t^{-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int t\sqrt{t+1}t^{-1}\,\mathrm{d}t = \int (t+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \tfrac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}} + C_t = \tfrac{2}{3}\big(\mathrm{e}^x + 1\big)^{\frac{3}{2}} + C
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.22 ($\star$)

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \dots$$

$x = t^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$
$t = \sqrt{x}$

$$\dots = \int \frac{1}{1+\sqrt{t^2}} \cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \dots$$

$u = 1 + t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = \mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}
\dots &= 2\int \frac{u-1}{u}\,\mathrm{d}u = 2\int 1\,\mathrm{d}u - 2\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = 2u - 2\ln|u| + C_u \\
&= 2(1+t) - 2\ln|1+t| + C_t \\
&= 2\big(1+\sqrt{x}\big) - 2\ln\big|1+\sqrt{x}\big| + C
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.23 ($\star$)

$$\int \frac{1+\ln x}{x(1-\ln x)}\,\mathrm{d}x = \dots$$

$x = \mathrm{e}^t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$
$t = \ln x$

$$\dots = \int \frac{1+\ln \mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t(1-\ln \mathrm{e}^t)}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+t}{1-t}\,\mathrm{d}t = \dots$$

$u = 1 - t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = -\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$

$$\ldots = -\int \frac{2-u}{u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{u-2}{u}\,\mathrm{d}u = \int 1\,\mathrm{d}u - 2\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$$
$$= u - 2\ln|u| + C_u = 1 - t - 2\ln|1-t| + C_t$$
$$\overset{*}{=} -\ln x - 2\ln|1-\ln x| + C$$

(∗ Die 1 kann in die Integrationskonstante „integriert“ werden.)

Aufgabe 3.24

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = \ldots$$

$$f'(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f(x) = -\cos x$$
$$g(x) = x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 1$$

$$\ldots = \big[-x\cos x\big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \cdot 1\mathrm{d}x$$
$$= \big(-\pi\cos\pi - 0\big) + \big[\sin x\big]_0^{\pi} = -\pi\cdot(-1) + \sin\pi - \sin 0 = \pi$$

Aufgabe 3.25

$$\int \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x = \ldots$$

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f(x) = \mathrm{e}^x$$
$$g(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \cos x$$

$$\ldots = \mathrm{e}^x\sin x - \int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f(x) = \mathrm{e}^x$$
$$g(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = -\sin x$$

$$\ldots = \mathrm{e}^x\sin x - \left(\mathrm{e}^x\cos x - \int \mathrm{e}^x(-\sin x)\,\mathrm{d}x\right)$$
$$= \mathrm{e}^x\sin x - \mathrm{e}^x\cos x - \int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$$

Addiere auf beiden Seiten $\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$:

$$2\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\sin x - \mathrm{e}^x\cos x$$
$$\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big(\mathrm{e}^x\sin x - \mathrm{e}^x\cos x\big) + C$$

Aufgabe 3.26

$$\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int \cos x \cos x \,\mathrm{d}x = \ldots$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sin x \\ g(x) &= \cos x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = -\sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ldots &= \sin x \cos x - \int \sin x(-\sin x) \,\mathrm{d}x \\ &= \sin x \cos x + \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x \\ &= \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \,\mathrm{d}x \\ &= \sin x \cos x + \int 1 \,\mathrm{d}x - \int \cos^2 x \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Addiere auf beiden Seiten $\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned} 2\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x &= \sin x \cos x + x \\ \int \cos^2 x \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}(\sin x \cos x + x) + C \end{aligned}$$

Aufgabe 3.27

$$\int x^2 \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x = \ldots$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^{-x} \quad \Rightarrow \quad f(x) = -\mathrm{e}^{-x} \\ g(x) &= x^2 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 2x \end{aligned}$$

$$\ldots = -x^2\mathrm{e}^{-x} + 2\int x\mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^{-x} \quad \Rightarrow \quad f(x) = -\mathrm{e}^{-x} \\ g(x) &= x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ldots &= -x^2\mathrm{e}^{-x} + 2\left(-x\mathrm{e}^{-x} + \int 1\mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x\right) \\ &= -x^2\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + C \\ &= -(x^2 + 2x + 2)\mathrm{e}^{-x} + C \end{aligned}$$

Aufgabe 3.28

$$\int x^3 \cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$$

Aufgabe 3.29

$$\int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x = \ldots \;\; \text{p}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \quad &\Rightarrow \quad f(x) &= \sin x \\ g(x) &= \sin x \quad &\Rightarrow \quad g'(x) &= \cos x \end{aligned}$$

$$\int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x \sin x - \int \cos x \sin x \,\mathrm{d}x$$

Addiere auf beiden Seiten $\int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned} 2\int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x &= \sin x \sin x \\ \int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\sin^2 x + C \end{aligned}$$

Aufgabe 3.30

$$\int x \ln|x| \mathrm{d}x = \ldots$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= x \quad &\Rightarrow \quad f(x) &= \tfrac{1}{2}x^2 \\ g(x) &= \ln|x| \quad &\Rightarrow \quad g'(x) &= x^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ldots &= \tfrac{1}{2}x^2 \ln|x| - \tfrac{1}{2}\int x^2 \cdot x^{-1} \mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{2}x^2 \ln|x| - \tfrac{1}{2}\int x \mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{2}x^2 \ln|x| - \tfrac{1}{4}x^2 + C \end{aligned}$$

$$\int_1^{\mathrm{e}} x \ln|x| \,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}x^2 \ln|x| - \tfrac{1}{4}x^2\right]_1^{\mathrm{e}} = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \tfrac{1}{4}\mathrm{e}^2 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{4}$$

Aufgabe 3.31

$$\int \ln^2 x \,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln^2 x \,\mathrm{d}x = \ldots$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \quad &\Rightarrow \quad f(x) &= x \\ g(x) &= \ln^2 x \quad &\Rightarrow \quad g'(x) &= 2\ln x \cdot x^{-1} \end{aligned}$$

$$\ldots = x\ln^2 x - 2\int x\ln x \cdot x^{-1}\,\mathrm{d}x$$
$$= x\ln^2 x - 2\int \ln x\,\mathrm{d}x$$
$$= x\ln^2 x - 2x(\ln x - 1) + C$$
$$= x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + C$$

Aufgabe 3.32

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

$$f'(x) = x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f(x) = -x^{-1}$$
$$g(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = x^{-1}$$

$$\ldots = -x^{-1}\ln x + \int x^{-1}\cdot x^{-1}\,\mathrm{d}x$$
$$= -x^{-1}\ln x + \int x^{-2}\,\mathrm{d}x$$
$$= -x^{-1}\ln x - x^{-1} + C$$

Aufgabe 3.33

$$\int x^4 \ln x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{5}x^5\big(\ln x - \tfrac{1}{5}\big) + C$$

Aufgabe 3.34

$$\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{3}\sin^2 x\cos x + \tfrac{2}{3}\int \sin x\,\mathrm{d}x$$
$$= -\tfrac{1}{3}\sin^2 x\cos x - \tfrac{2}{3}\cos x + C$$

Aufgabe 3.35

$$\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}\sin x\cos^3 x + \tfrac{3}{4}\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$$
$$= \tfrac{1}{4}\sin x\cos^3 x + \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{2}(x + \sin x\cos x) + C$$
$$= \tfrac{1}{4}\sin x\cos^3 x + \tfrac{3}{8}\sin x\cos x + \tfrac{3}{8}x + C$$

Aufgabe 3.36

$$\int (2x^2+4x-5)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{e}^{2x}\left[\tfrac{1}{2}(2x^2+4x-5) - \tfrac{1}{4}(4x+4) + \tfrac{1}{8}\cdot 4\right] + C$$

$$= \mathrm{e}^{2x}\left[x^2+2x-\tfrac{5}{2}-x-1+\tfrac{1}{2}\right] + C$$

$$= \mathrm{e}^{2x}\left[x^2+x-3\right] + C$$

Aufgabe 3.37

$$x = \ln t$$

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

Grenzen: damit x von 0 nach 1 läuft, muss t von 1 nach e laufen.

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{e}^{\ln t}}{1+\mathrm{e}^{\ln t}}\cdot\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{t}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \big[\ln|1+t|\big]_1^{\mathrm{e}} = \ln(1+\mathrm{e}) - \ln 2$$

$$= \ln\frac{1+\mathrm{e}}{2} \approx 0.6201$$

Aufgabe 3.38

$$\int_0^1 (4x+1)^3\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = 4x+1 \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 4 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\mathrm{d}u$

$$\ldots = \int_{u(0)}^{u(1)} u^3\cdot\frac{1}{4}\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\int_1^5 u^3\mathrm{d}u = \frac{1}{16}\left[u^4\right]_1^5 = \frac{1}{16}(625-1) = 39$$

Aufgabe 3.39

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} \quad\Rightarrow\quad f(x) = -\mathrm{e}^{-x}$$

$$g(x) = x \quad\Rightarrow\quad g'(x) = 1$$

$$\ldots = \left[x \cdot \left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x = \left[-x \cdot \mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[x \cdot \left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left[-x \cdot \mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 + \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1$$

$$= \left(-1 \cdot \mathrm{e}^{-1} + 0 \cdot \mathrm{e}^0\right) + \left(-\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^0\right) = 1 - 2\mathrm{e}^{-1}$$

Aufgabe 3.40

$$\int_0^1 \frac{3x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = x^2 + 9 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\mathrm{d}u$

$$\ldots = \int_{u(0)}^{u(1)} \frac{3x}{u} \cdot \frac{1}{2x}\mathrm{d}u = \frac{3}{2}\int_9^{10} \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \frac{3}{2} \cdot [\ln|u|]_9^{10}$$

$$= \frac{3}{2}\left(\ln(10) - \ln(9)\right) = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{10}{9}\right)$$

Aufgabe 3.41

$$\int_{-1}^1 x^2 \cdot \mathrm{e}^{(x^3)}\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = x^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{3x^2}\mathrm{d}u$

$$\ldots = \int_{u(-1)}^{u(1)} x^2\mathrm{e}^u \cdot \frac{1}{3x^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int_{-1}^1 \mathrm{e}^u\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\left[\mathrm{e}^u\right]_{-1}^1 = \frac{1}{3}\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}\right)$$

Aufgabe 3.42

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cdot \cos x\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u = \sin x \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}u$

Grenzen: $u(0) = 0$, $u(\pi/2) = 1$

$$\ldots = \int_0^1 u^2 \cdot \cos x \cdot \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}u = \int_0^1 u^2\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\left[u^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$$

Aufgabe 3.43

$$\int_1^2 x^2 \ln x\,\mathrm{d}x = \ldots$$

$$f'(x) = x^2 \qquad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{3}x^3$$

$$g(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned}
\ldots &= \left[\frac{1}{3}x^3 \cdot \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 \cdot \ln x\right]_1^2 - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 \cdot \ln x\right]_1^2 - \left[\frac{1}{9}x^3\right]_1^2 \\
&= \left(\frac{8}{3} \cdot \ln 2 - \frac{1}{3} \cdot \ln 1\right) - \left(\frac{8}{9} - \frac{1}{9}\right) \\
&= \frac{8}{3} \cdot \ln 2 - \frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{7}{9} \\
&= \frac{8}{3} \cdot \ln 2 - \frac{7}{9}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.44

$$\int_0^1 x(x^2+1)^3\,\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution $u(x) = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u$

Die Transformation der Grenzen werden hier an Ort und Stelle vorgenommen:

$$\ldots = \int_{u(0)}^{u(1)} x \cdot u^3 \cdot \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u = \int_1^2 \frac{1}{2}u^3\,\mathrm{d}u = \frac{1}{8}\,\left[u^4\right]_1^2 = \frac{1}{8}\,(16-1) = \frac{15}{8}$$

Aufgabe 3.45

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\mathrm{d}x = \ldots$$

Substitution: $u(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}u$

Die Grenzen werden wieder vor Ort substituiert:

$$\cdots = \int_{u(1)}^{u(\mathrm{e})} \frac{\sqrt{u}}{x} \cdot x\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{2}{3}\,x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 3.46

$$\int 1 \cdot \arccos x\,\mathrm{d}x = \ldots$$

$$f'(x) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = x$$
$$g(x) = \arccos x \qquad \Rightarrow \qquad g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\cdots = x \arccos x - \int x \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \ldots$$

$$u(x) = 1 - x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -2x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = -\tfrac{1}{2x}\,\mathrm{d}u$$

$$\begin{aligned}
\ldots &= x \arccos x - \int x \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{-1}{2x}\,\mathrm{d}u \\
&= x \arccos x + \int \frac{1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \\
&= x \arccos x + \sqrt{u} + C = x \arccos x + \sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}$$