Aufgabe 2.1

$$\int x^{10}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{11}\,x^{11} + C$$

Aufgabe 2.2

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$$

Aufgabe 2.3

$$\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int x^{-2}\,\mathrm{d}x = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

Aufgabe 2.4

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$$

Aufgabe 2.5

$$\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

Aufgabe 2.6

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

Aufgabe 2.7

$$\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$$

Aufgabe 2.8

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

Aufgabe 2.9

$$\int \ln|x|\,\mathrm{d}x = x(\ln|x| - 1) + C$$

Aufgabe 2.10

$$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$$

Aufgabe 2.11

$$\int (x^2 + x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\, x^3 + \frac{1}{2} x^2 + C$$

Aufgabe 2.12

$$\int (\sin x + \cos x) \, \mathrm{d}x = -\cos x + \sin x + C$$

Aufgabe 2.13

$$\int (x^5 - x^3 + 2) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{6}\, x^6 - \frac{1}{4}\, x^4 + 2x + C$$

Aufgabe 2.14

$$\int (x-3)(x+4) \, \mathrm{d}x = \int (x^2 + x - 12) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - 12x + C$$

Achtung: Integrale dürfen nicht mit Produkten/Quotienten/Potenzen vertauscht werden! Daher Produkte möglichst als Summen darstellen.

Aufgabe 2.15

$$\int \frac{x^2 + x}{x^2} \, \mathrm{d}x = \int \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} \right) \mathrm{d}x = \int 1 \, \mathrm{d}x + \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$$
$$= x + \ln|x| + C$$

Aufgabe 2.16

$$\int \left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \right) \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} + C$$

Aufgabe 2.17

$$\int 5x^4 \, \mathrm{d}x = 5 \cdot \frac{1}{5} x^5 = x^5 + C$$

Aufgabe 2.18

$$\int -4 \sin x \, \mathrm{d}x = -4 \int \sin x \, \mathrm{d}x = -4\,(-\cos x) = 4\, \cos x + C$$

Aufgabe 2.19

$$\int 7\,\mathrm{d}x = 7\int 1\,\mathrm{d}x = 7x + C$$

Aufgabe 2.20

$$\int (x-2)^2\,\mathrm{d}x = \int \left(x^2 - 4x + 4\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,x^3 - 2\,x^2 + 4\,x + C$$

Aufgabe 2.21

$$\int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x = 3\,\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 3\,\ln|x| + C$$

Aufgabe 2.22

$$\int \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,\int \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\,\mathrm{e}^{3x} + C$$

Aufgabe 2.23

$$\int (3\cos x - \tan x)\,\mathrm{d}x = 3\sin x + \ln|\cos x| + C$$

Aufgabe 2.24

$$\int (2x^4 - 3)^2\,\mathrm{d}x = \int (4x^8 - 12x^4 + 9)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{9}\,x^9 - \frac{12}{5}\,x^5 + 9x + C$$

Aufgabe 2.25

$$\begin{aligned}\int \sqrt{5x}\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{5}\cdot\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \sqrt{5}\cdot\frac{2}{3}\,x^{3/2}\\ &= \frac{2\sqrt{5}}{3}\,x^{3/2} + C\end{aligned}$$

Aufgabe 2.26

$$\int 2^x\,\mathrm{d}x = \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

Aufgabe 2.27

$$\int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^3}\right) \mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + 3\int x^{-3}\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\ln|x| - \frac{3}{2}x^{-2} + C$$

Aufgabe 2.28

$$\int_1^3 x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^3 = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

Aufgabe 2.29

$$\int_2^4 \left(x^2 + 3\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 + 3x\right]_2^4 = \frac{74}{3}$$

Aufgabe 2.30

$$\int_1^3 \left(x^2 - 4x\right)^2\mathrm{d}x = \int_1^3 \left(x^4 - 8x^3 + 16x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{406}{15}$$

Aufgabe 2.31

$$\int_2^4 x^5(2x+5)\,\mathrm{d}x = \int_2^4 \left(2x^6 + 5x^5\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{7}x^7 + \frac{5}{6}x^6\right]_2^4 = \frac{56\,032}{7}$$

Aufgabe 2.32

$$\int_{-1}^0 \left(3x^2 - kx + k\right)\,\mathrm{d}x = -2$$
$$\left[x^3 - \frac{1}{2}kx^2 + kx\right]_{-1}^0 = -2$$
$$(0 - 0 + 0) - \left(-1 - \frac{1}{2}k - k\right) = -2$$
$$1 + \frac{3}{2}k = -2$$
$$\frac{3}{2}k = -3$$
$$k = -2$$

Aufgabe 2.33

$$\int_1^b (x^2 + x + 1)\,\mathrm{d}x = 144$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_1^b = 144$$

$$\left(\frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{2}b^2 + b\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right) = 144$$

$$\frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{2}b^2 + b - \frac{875}{6} = 0$$

$$b = 7$$

Aufgabe 2.34

$$\int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4 = \frac{16}{3}$$

Aufgabe 2.35

$$\int_0^1 5x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 5\int_0^1 x^1 \cdot x^{1/2}\,\mathrm{d}x = 5\int_0^1 x^{3/2}\,\mathrm{d}x = 5\left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^1 = 2$$

Aufgabe 2.36

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\,\mathrm{d}x = \big[\sin(x)\big]_0^{\pi/2} = \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1$$

Aufgabe 2.37

$$\int_0^{\pi/4} \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\pi/4}$$

$$= -\frac{1}{2}\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{1}{2}\cos(2 \cdot 0)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos(0) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 2.38

$$\int_1^2 \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = 2\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 2\big[\ln(x)\big]_1^2 = 2(\ln(2) - \ln(1)) = 2\ln(2)$$

Aufgabe 2.39

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{x^2+4x+3}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_2^3 \left(x+4+\frac{3}{x}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2+4x+3\ln|x|\right]_2^3 \\ &= \left(\frac{9}{2}+12+3\ln|3|\right)-\big(4+8+3\ln|2|\big) \\ &= \frac{13}{2}+3\big(\ln(3)-\ln(2)\big) \\ &= \frac{13}{2}+3\ln\big(\frac{3}{2}\big)\end{aligned}$$

Aufgabe 2.40

$f'(x) = 3x^2 - 4$

$f(x) = x^3 - 4x + C$

$f(5) = 5^3 - 4\cdot 5 + C = 54 \quad \Rightarrow \quad C = -51$

$f(x) = x^3 - 4x - 51$

Aufgabe 2.41

$g'(x) = 5 - x$

$g(x) = 5x - \frac{1}{2}x^2 + C$

$g(-2) = -10 - 2 + C = -12 + C$

$-g(2) = -(10 - 2 + C) = -8 - C$

$g(-2) = -g(2) \quad \Rightarrow \quad -12 + C = -8 - C \quad \Rightarrow \quad C = 2$

$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x + 2$

Aufgabe 2.42

$f''(x) = 2x$

$f'(x) = x^2 + C_1$

$f'(2) = 5 \quad \Rightarrow \quad 4 + C_1 = 5 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1$

$f'(x) = x^2 + 1$

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + C_2$

$f(1) = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} + 1 + C_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{5}{3}$

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + \frac{5}{3}$

Aufgabe 2.43

$f''(x) = x^2 - 1$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + C_1$

$f'(0) = 4 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 4$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 4$

$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + C_2$

$f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$

$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4x$