Aufgabe 15.1

$$\begin{aligned} 1 &= -8 + 4t + t - 1 \\ 10 &= 5t \\ t &= 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 15.2

$$\begin{aligned} 7 &= 2^2 + 2t + t^2 \\ 0 &= t^2 + 2t - 3 \\ 0 &= (t-1)(t+3) \\ t_1 &= 1 \\ t_2 &= -3 \end{aligned}$$

Aufgabe 15.3

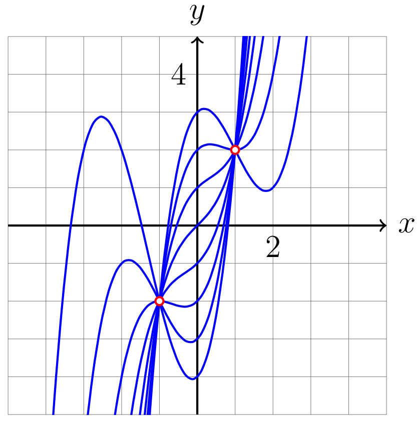
$$\begin{aligned} f_s(x) &= f_t(x) \quad [s \neq t] \\ x^3 + sx^2 + x - s &= x^3 + tx^2 + x - t \\ sx^2 - s &= tx^2 - t \\ sx^2 - tx^2 - s + t &= 0 \\ x^2(s-t) - (s-t) &= 0 \\ (s-t)(x^2-1) &= 0 \\ x^2 - 1 &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= -1 \end{aligned}$$

$f_t(1) = 1^3 + t \cdot 1^2 + 1 - t = 1 + t + 1 - t = 2$

$\Rightarrow \quad P_1(1, 2)$

$f_t(-1) = (-1)^3 + t \cdot (-1)^2 - 1 - t = -1 + t - 1 - t = -2$

$\Rightarrow \quad P_2(-1, -2)$



Aufgabe 15.4

$$\begin{aligned}
f_s(x) &= f_t(x) \quad [s \neq t] \\
x^3 + sx - 2s &= x^3 + tx^2 - 2t \\
sx - 2s &= tx - 2t \\
sx - tx - 2s + 2t &= 0 \\
x(s-t) - 2(s-t) &= 0 \\
(s-t)(x-2) &= 0 \\
x &= 2
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung der y-Koordinate muss die x-Koordinate in die Funktiongleichung eingesetzt werden:

$f_t(2) = 2^3 + t \cdot 2 - 2 \cdot t = 8 + 2t - 2t = 8$

Alle Kurven der Schar gehen durch den Punkt $P(2, 8)$.

Aufgabe 15.5

Bestimme allgemein die Nullstellen der Funktionenschar $f_t(x) = x^2 - tx - 2t^2$.

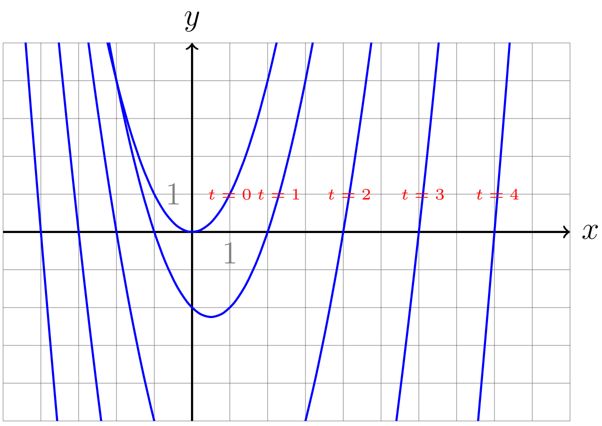
Verwende die Lösungsformel für die quadratische Gleichung.

Das Polynom auf der linken Seite der Gleichung $x^2 - tx - 2t^2 = 0$ hat die Koeffizienten $a = 1$, $b = -t$ und $c = -2t^2$.

Diskriminante: $D = b^2 - 4ac = t^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2t^2) = 9t^2$

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{t + 3t}{2} = 2t \\
x_2 &= \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{t - 3t}{2} = -t
\end{aligned}$$

Aufgabe 15.5 Graphische Darstellung:



Aufgabe 15.6

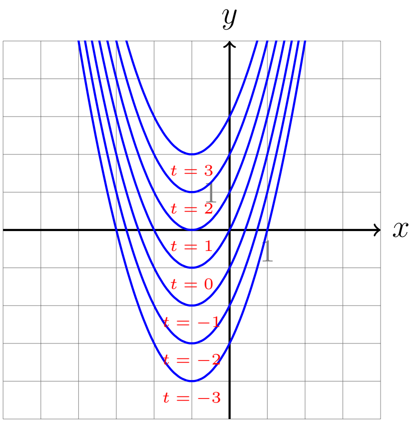
Eine quadratische Gleichung hat genau dann zwei Lösungen, wenn für die Diskriminante $D = b^2 - 4ac > 0$ gilt.

Die quadratische Gleichung $x^2 + 2x + t = 0$ hat die Koeffizienten $a = 1$, $b = 2$, $c = t$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &> 0 \\ 4 - 4t &> 0 \\ 4 &> 4t \\ 1 &> t \end{aligned}$$

Die Funktionenschar hat für $t < 1$ genau zwei Nullstellen.

Beachte: Ungleichungen können wie Gleichungen umgeformt werden, wobei folgende Ausnahme gilt: multipliziert man eine Ungleichung mit einer negativen Zahl (oder dividiert man durch eine negative Zahl), so ändert das Relationszeichen die Richtung.



Aufgabe 15.7

Für welche Werte des Parameters t hat die Funktionenschar $f_t(x) = x^2 + tx + 1$ genau eine Nullstelle?

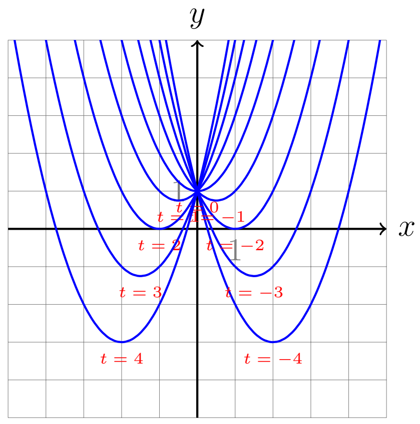
Eine quadratische Gleichung hat genau dann eine Lösung, wenn für die Diskriminante $D = b^2 - 4ac = 0$ gilt.

Koeffizienten: $a = 1$, $b = t$ und $c = 1$.

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 0 \\ t^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 &= 0 \\ t^2 - 4 &= 0 \\ t_1 &= -2 \\ t_2 &= 2 \end{aligned}$$

Die Funktionenschar hat für $t = -2$ oder $t = 2$ genau eine Nullstelle.

Aufgabe 15.7



Aufgabe 15.8

Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = tx^3 - x^2 + t$ mit $t \in \mathbb{R}$.
Für welchen Wert von t hat die Tangente von f_t an der Stelle $x = 2$ die Steigung 4?

$f_t(x) = tx^3 - x^2 + t$

$f_t'(x) = 3tx^2 - 2x$

$$\begin{aligned} f_t'(2) &= 4 \\ 3t \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 &= 4 \\ 12t &= 8 \\ t &= \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Aufgabe 15.9

Ableitungen:
$$\begin{aligned} f_t(x) &= tx^3 - 3tx \\ f_t'(x) &= 3tx^2 - 3t \\ f_t''(x) &= 6tx \end{aligned}$$

Kandidaten:
$$\begin{aligned} f_t'(x) &= 0 \\ 3tx^2 - 3t &= 0 \\ 3t(x^2 - 1) &= 0 \\ x^2 - 1 &= 0 \\ x_1 &= -1 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Die Extremstellen sind offenbar unhabhängig von t.

Test: $f_t''(x) = 6tx$

$f_t''(-1) = -6t < 0$, da $t > 0$ vorausgesetzt wurde

$f_t''(1) = 6t > 0$, da $t > 0$ vorausgesetzt wurde

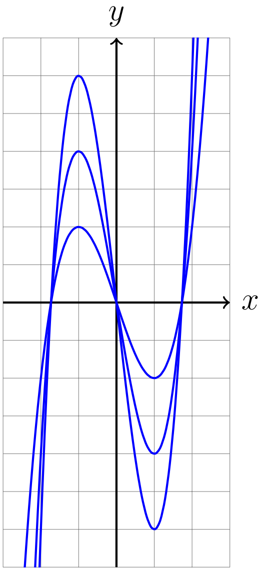
y-Koordinaten:

$y_1 = f_t(-1) = t(-1)^3 - 3t(-1) = -t + 3t = 2t$

$y_2 = f_t(1) = t \cdot 1^3 - 3t = -2t$

Endresultat:

$HoP(-1, 2t),\ TiP(1, -2t)$



Aufgabe 15.10

Die angegebenen Stellen $x = 0$ und $x = t$ in die Funktionsgleichung einsetzen, um zu prüfen, dass es sich um Nullstellen handelt:

$f_t(0) = t^2 \cdot 0 - t \cdot 0^2 = 0$ (ok)

$f_t(t) = t^2 \cdot t - t \cdot t^2 = t^3 - t^3 = 0$ (ok)

Da es sich um eine (nach unten geöffnete) Parabel handelt, kann der Flächeninhalt durch das folgende Integral berechnet werden:

$$\int_0^t f_t(x)\mathrm{d}x = \int_0^t \left(t^2x - tx^2\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}t^2x^2 - \frac{1}{3}tx^3\right]_0^t$$
$$= \left(\frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{3}t^4\right) - (0 - 0) = \frac{1}{6}t^4$$

Aufgabe 15.11

Nullstellen:
$$\begin{aligned} x^2 - ax &= 0 \\ x(x-a) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= a \end{aligned}$$

Ableitungen:
$$\begin{aligned} f_a(x) &= x^2 - ax \\ f_a'(x) &= 2x - a \\ f_a''(x) &= 2 \quad \Rightarrow \text{keine Wendepunkte} \end{aligned}$$

Extrempunkte:

Kandidat: $f_a'(x) = 2x - a = 0 \Rightarrow x = \dfrac{a}{2}$

Test: $f_a''\left(\dfrac{a}{2}\right) = 2 > 0 \Rightarrow x = \dfrac{a}{2}$ ist Tiefstelle

y-Koordinate:

$y = f_a\left(\dfrac{a}{2}\right) = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 - a \cdot \left(\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{a^2}{2} = -\dfrac{a^2}{4}$

TiP $\left(\dfrac{a}{2}, -\dfrac{a^2}{4}\right)$

Aufgabe 15.12

Nullstellen:
$$\begin{aligned} x^3 - 3ax^2 &= 0 \\ x^2(x-3a) &= 0 \\ x_1 &= 0 \quad \text{(doppelte Nullstelle)} \\ x_2 &= 3a \end{aligned}$$

Ableitungen:

$f_a(x) = x^3 - 3ax^2$
$f_a'(x) = 3x^2 - 6ax$
$f_a''(x) = 6x - 6a$
$f_a'''(x) = 6$

Extrempunkte

Kandidaten:
$$\begin{aligned} f_a'(x) &= 0 \\ 3x^2 - 6ax &= 0 \\ 3x(x-2a) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 2a \end{aligned}$$

Test: $f_a''(0) = -6a < 0 \Rightarrow x = 0$ ist Hochstelle

$f_a''(2a) = 6 \cdot 2a - 6a = 6a > 0 \Rightarrow x = 2a$ ist Tiefstelle

y-Koordinaten und Punkte:

$f_a(0) = 0 \Rightarrow HoP(0|0)$

$f_a(2a) = (2a)^3 - 3a(2a)^2 = 8a^3 - 3a \cdot 4a^2 = -4a^3$
$\Rightarrow$ TiP$\left(2a, -4a^3\right)$

Wendepunkt:

Kandidat:
$$\begin{aligned} f_a''(x) &= 0 \\ 6x - 6a &= 0 \\ 6(x-a) &= 0 \\ x_2 &= a \end{aligned}$$

Test: $f_a'''(a) = 6 \neq 0 \Rightarrow x = a$ ist Wendestelle

y-Koordinate:

$f_a(a) = a^3 - 3a(a)^2 = -2a^3 \Rightarrow WeP\big(a, -2a^3\big)$

Aufgabe 15.13

Ableitungen:

$f_a(x) = ax^2 - x^3$

$f_a'(x) = 2ax - 3x^2$

$f_a''(x) = 2a - 6x$

$f_a'''(x) = -6$

Wendepunkt-Kandidaten:
$$\begin{aligned} f_a''(x) &= 0 \\ 2a - 6x &= 0 \\ 2(a-3x) &= 0 \\ x &= \frac{1}{3}a \end{aligned}$$

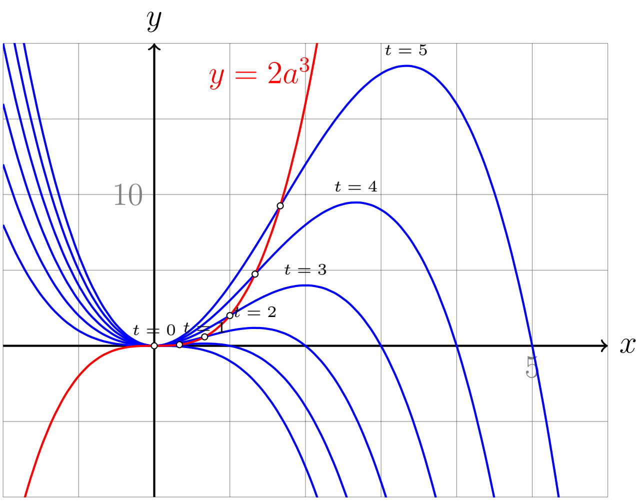
Test: $f_a'''\left(\frac{1}{3}a\right) = -6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}a \quad$ ist Wendestelle

$$y = f_a\left(\frac{1}{3}a\right) = a \cdot \left(\frac{1}{3}a\right)^2 - \left(\frac{1}{3}a\right)^3 = \frac{1}{9}a^3 - \frac{1}{27}a^3 = \frac{2}{27}a^3 \Rightarrow \text{WeP}\left(\frac{1}{3}a\middle|\frac{2}{27}a^3\right)$$

$x = \frac{1}{3}a \quad \Rightarrow \quad a = 3\ (*)$

$$y = \frac{2}{27}a^3 \overset{(*)}{=} \frac{2}{27}(3a)^3 = \frac{2}{27} \cdot 27a^3 = 2a^3$$

Die Wendepunkte liegen auf der Kurve mit der Gleichung $y = 2a^3$



Aufgabe 15.14

$$f_t(x) = tx - x^2$$
$$f_t'(x) = t - 2x$$
$$f_t''(x) = -2$$

Kandidaten: $f_t'(x) = 0$

$$t - 2x = 0$$
$$x = \frac{t}{2}$$

Test:

$$f_t''\left(\frac{t}{2}\right) = -2 < 0$$

$x = \frac{t}{2}$ ist in der Tat eine Hochstelle.

Hochpunkt:

$$y = f_t\left(\frac{t}{2}\right) = t \cdot \frac{t}{2} - \left(\frac{t}{2}\right)^2 = \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{4} = \frac{t^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{HoP}\left(\frac{t}{2}, \frac{t^2}{4}\right)$$

$P(x, y)$ liegt auf der 1. Winkelhalbierenden, wenn $x = y$ gilt.

$$x = y$$
$$\frac{t}{2} = \frac{t^2}{4} \qquad || \cdot 4$$
$$2t = t^2$$
$$2t - t^2 = 0$$
$$t(2 - t) = 0$$
$$t_1 = 0 \quad \text{(entfällt wegen } t > 0)$$
$$t_2 = 2$$