Aufgabe 14.1

Zielfunktion (ZF): $S(x, y) = x^2 + y^2$

Nebenbedingung (NB): $x + y = 36 \quad \Leftrightarrow \quad y = 36 - x$

NB in ZF einsetzen: $S(x) = x^2 + (36 - x)^2$

Extrema:

$$\begin{aligned} S'(x) &= 0 \\ 2x + 2(36 - x) \cdot (-1) &= 0 \\ 4x - 72 &= 0 \\ x &= 18 \end{aligned}$$

$S''(x) = 4 > 0$ (Minimum)

Lösung: Die Zahlen sind 18 und 18

Aufgabe 14.2

Zielfunktion: $A(x, y) = x \cdot y$

Nebenbedingung: $2x + 2y = 20 \quad \Leftrightarrow \quad y = 10 - x$

NB in ZF einsetzen: $A(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$

Extrema: $$\begin{aligned} A'(x) &= 0 \\ 10 - 2x &= 0 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Test: $A''(x) = -2 < 0$ (Maximum)

Lösung: $y = 10 - x = 5$
Ein Quadrat mit der Seitenlänge 5 cm

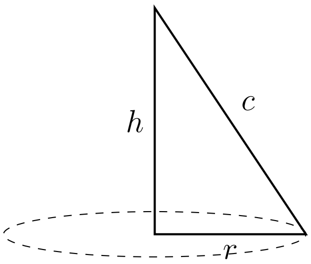
Aufgabe 14.3

Der Legende nach wurde der phönizischen Königin Dido so viel Land zugesprochen, wie sie mit einer Kuhhaut abdecken konnte.

Die schlaue Dido zerschnitt die Kuhhaut in dünne Streifen und bekam so ein Band, mit dem sie ein grosses Stück Land für die Stadt Karthago eingrenzen konnte.

Das (klassische) *isoperimetrische Problem* bezeichnet die Frage, welche Form eine Kurve der Länge l haben muss, damit sie eine Fläche mit maximalem Flächeninhalt umspannt.

Aufgabe 14.4



Zielfunktion: $V(r,h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Nebenbedingung: $r^2 + h^2 = 64 \quad \Leftarrow \quad r^2 = 64 - h^2$

NB in ZF einsetzen: $V(h) = \frac{1}{3}\pi(64 - h^2)h = \frac{1}{3}\pi(64h - h^3)$

Extrema:

$V'(h) = \frac{1}{3}\pi\left(64 - 3h^2\right)$
$V''(h) = -2\pi h$

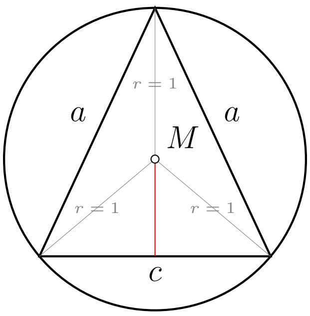
$$\begin{aligned} V'(h) &= 0 \\ 64 - 3h^2 &= 0 \\ h &= \sqrt{\tfrac{64}{3}} \end{aligned}$$

Test: $V''\left(\sqrt{\frac{64}{3}}\right) = -6\sqrt{\frac{64}{3}} < 0$ (Maximum)

Lösung: $r^2 = 64 - \frac{64}{3} = \frac{128}{3}$

Das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten $h = \sqrt{\frac{64}{3}}$ cm und $r = \sqrt{\frac{128}{3}}$ cm

Aufgabe 14.5



Zielfunktion: $A(c,h) = \dfrac{1}{2} \cdot c \cdot h$

Nebenbedingung:

$$h = 1 + \sqrt{1^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = 1 + \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{c^2}{4}} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{4 - c^2}$$

Nebenbedingung in Zielfunktion einsetzen:

$$A(c) = \frac{c}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{4 - c^2}\right) = \frac{c}{2} + \frac{c}{4}\sqrt{4 - c^2}$$

Extrema: $A'(c) = 0$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{4-c^2} - \frac{c^2}{4\sqrt{4-c^2}} = 0 \quad || \cdot 4\sqrt{4-c^2}$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{4-c^2} + (4-c^2) - c^2 &= 0 \\ 2\sqrt{4-c^2} &= 2c^2 - 4 \\ \sqrt{4-c^2} &= c^2 - 2 \\ 4 - c^2 &= c^4 - 4c^2 + 4 \\ 0 &= c^4 - 3c^2 = c^2(c^2-3) \\ c &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

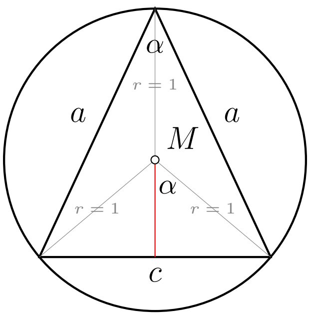
Lösung:

$$h = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{4-c^2} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{4-3} = \frac{3}{2}$$

$$a = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$$

Es handelt sich um ein gleichseitiges Dreieck.

2. Lösung



Zielfunktion: $A(c,h) = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$

Nebenbedingungen:

$h = 1 + 1 \cdot \cos\alpha$

$c = 2 \cdot \sin\alpha$

Nebenbedingungn in Zielfunktion einsetzen:

$$A(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot 2\sin\alpha \cdot (1 + \cos\alpha) = \sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha$$

Extrema: $A'(\alpha) = 0$

$$\begin{aligned}
\cos\alpha + \cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha(-\sin\alpha) &= 0\\
\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha &= 0\\
\cos\alpha + \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) &= 0\\
2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 &= 0\\
2u^2 + u - 1 &= 0
\end{aligned}$$

$D = 1 - 4\cdot 2\cdot(-1) = 9$

$u_1 = \dfrac{-1+3}{4} = \dfrac{1}{2} = \cos\alpha \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

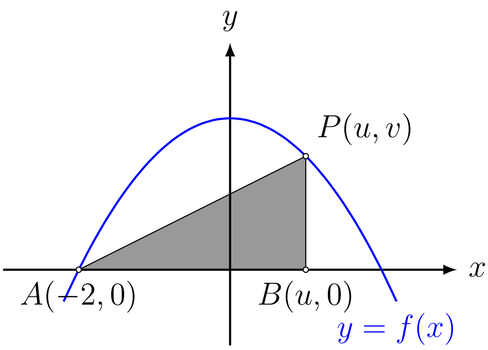
$u_2 = \dfrac{-1-3}{4} = -1 = \cos\alpha \Rightarrow \alpha = 180^\circ \quad \text{(sinnlos)}$

Lösung:

Wegen $\alpha = 60^\circ$ müssen auch die anderen Winkel 60° sein. Also handelt es sich um ein gleichseitiges Dreieck mit:

$a = b = c = 2\cdot\sin 60^\circ = 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Aufgabe 14.6



Zielfunktion:

$A(x,y) = \frac{1}{2}(2+x)\cdot y$

Nebenbedingung:

$y = 2 - \frac{1}{2}x^2$

Nebenbedingung in Zielfunktion einsetzen:

$A(x) = \frac{1}{2}(2+x)\left(2-\frac{1}{2}x^2\right) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 2$

Extrema: $A'(x) = 0$

$-\frac{3}{4}x^2 - x + 1 = 0$

$3x^2 + 4x - 4 = 0$

$D = 4^2 - 4\cdot 3\cdot(-4) = 64$

$x_1 = (-4+8)/6 = \frac{2}{3}$

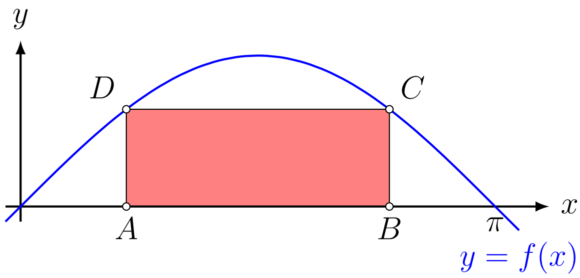
$x_2 = (-4-8)/6 = -2 \quad \text{(sinnlos)}$

$A''(x) = -\frac{3}{2}x - 1$

$A''(\frac{2}{3}) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} - 1 = -2$ (Maximum)

Lösung: $P\left(\frac{2}{3}, \frac{16}{9}\right)$

Aufgabe 14.7



Zielfunktion:

$A(l, b) = l \cdot b$

Nebenbedingungen:

$l = \pi - 2x$

$h = \sin(x)$

Nebenbedingung in Zielfunktion einsetzen:

$A(x) = (\pi - 2x)\sin(x) = \pi \sin(x) - 2x \sin(x)$

Extrema:

$A'(x) = (-2)\sin(x) + (\pi - 2x)\cos(x) = 0$

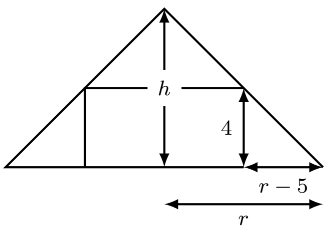
Die Gleichung $-2\sin(x)+(\pi-2x)\cos(x) = 0$ ist *transzendent*, da sowohl trigonometrische Funktionen als auch der Faktor x in ihr auftreten. Normalerweise sind solche Gleichungen nicht algebraisch lösbar.

Mit einem geeigneten Taschenrechner bestimmt man entweder das Maximimum von $A(x)$ oder die Nullstelle von $A'(x)$ im angegebenen Intervall und erhält $x_{\text{max}} = 0.710$.

Lösung: Für $u = 0.710$ erhält man einen Flächeninhalt von $1.122\,\text{FE}$

Aufgabe 14.8

Achsenquerschnitt von Zylinder und Kegel:



r und h bezeichnen Radius und Höhe des Kegels.

Zielfunktion:

$V(r,h) = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$

Nebenbedingung:

$$h : r = 4 : (r-5) \quad \text{(1. Strahlensatz)}$$

$$h(r-5) = 4r$$

$$h = \frac{4r}{r-5} \quad (r > 5)$$

Nebenbedingung in Zielfunktion einsetzen:

$V(r) = \dfrac{4\pi r^3}{3(r-5)}$

Extrema:

$$V'(r) = \frac{12\pi r^2 \cdot 3(r-5) - 4\pi r^3 \cdot 3}{9(r-5)^2}$$

$$= \frac{36\pi r^3 - 180\pi r^2 - 12\pi r^3}{9(r-5)^2} = \frac{24\pi r^3 - 180\pi r^2}{9(r-5)^2}$$

$$V'(r) = 0$$

$$24\pi r^3 - 180\pi r^2 = 0$$

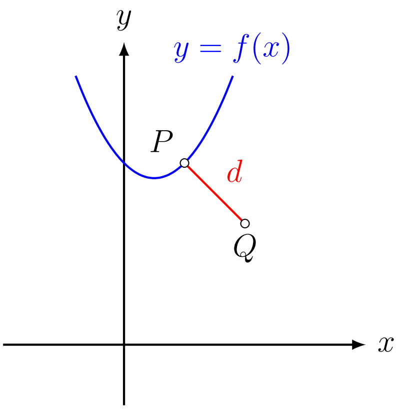
$$12\pi r^2(2r-15) = 0$$

$$r_1 = 0 \quad \text{(verletzt } r > 5\text{)}$$

$$r_2 = 7.5 \quad \text{(Maximum)}$$

Antwort: Der Kegel hat den Radius $r = 7.5$ und die Höhe $h = 12$.

Aufgabe 14.9



Zielfunktion: $d(x,y) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}$

$D(x,y) = d^2(x,y) = (x-2)^2 + (y-2)^2$

Nebenbedingung:

$y = x^2 - x + 3$

Nebenbedingung in Zielfunktion einsetzen:

$$
\begin{aligned}
D(x) &= (x-2)^2 + (x^2 - x + 1)^2 \quad = \ldots \\
&= x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 5
\end{aligned}
$$

Extrema:

$D'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 8x - 6 = 0$

$D''(x) = 12x^2 - 12x + 8$

$D'(x) = 0$

$x = 1 \quad (x_2 \text{ und } x_3 \text{ sind komplex})$

Test: $D''(1) = 8 > 0$ (Minimum)

Lösung: $P(1,3)$

Lösung mit Lagrange-Multiplikator

Zielfunktion: $f(x,y) = (x-2)^2 + (y-2)^2$ Abstand von $Q(2,2)$

NB: $g(x,y) = x^2 - x + 3 - y$ ist erfüllt, wenn $g(x,y) = 0$

Lagrange-Funktion:

$$L(x,y,\lambda) = \underbrace{(x-2)^2 + (y-2)^2}_{f(x,y)} + \lambda \underbrace{(x^2 - x + 3 - y)}_{g(x,y)}$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = 2(x-2) + \lambda(2x-1) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = 2(y-2) + \lambda(-1) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = x^2 - x + 3 - y = 0 \quad (3)$$

Aus (1) erhält man $x = \dfrac{\lambda + 4}{2\lambda + 2}$

Aus (2) erhält man $y = \dfrac{\lambda + 4}{2}$

Einsetzen dieser Terme in (3):

$$\left(\frac{\lambda+4}{2\lambda+2}\right)^2 - \frac{\lambda+4}{2\lambda+2} + 3 - \frac{\lambda+4}{2} = 0$$

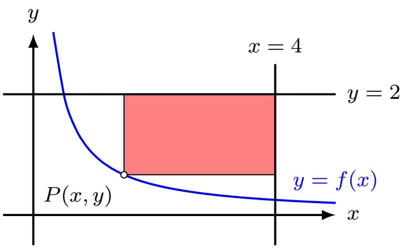
$$(\lambda+4)^2 - (\lambda+4)(2\lambda+2) + 3(2\lambda+2)^2 - 2(\lambda+4)(\lambda+1)^2 = 0$$

$$-2\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda + 12 = 0$$

$\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = \dfrac{-5 \pm 23\mathrm{i}}{4}$

$\Rightarrow \quad x = 1,\ y = 3$

Aufgabe 14.10



Zielfunktion:

$A(x,y) = (4-x)(2-y)$

Nebenbedingung:

$y = 1/x$

Nebenbedingung in Zielfunktion einsetzen:

$A(x) = (4-x)(2-x^{-1}) = 9 - 2x - 4x^{-1}$

Extrema:
$$\begin{aligned} A'(x) &= 0 \\ -2 + 4x^{-2} &= 0 \\ 2x^{-2} &= 1 \\ x^{-2} &= \frac{1}{2} \\ x^2 &= 2 \\ x &= \sqrt{2} \quad (x > 0) \end{aligned}$$

Test: $A''(x) = -8x^{-3}$

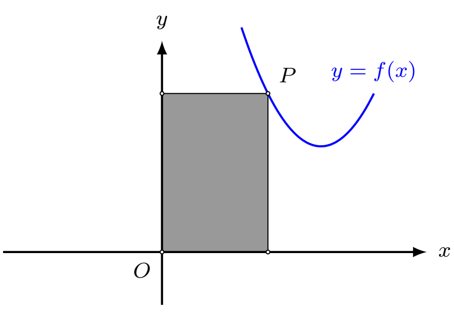
$A''(\sqrt{2}) = -8\big(\sqrt{2}\big)^{-3} < 0$ (Maximum)

Lösung:

Länge: $(4-x) = 4 - \sqrt{2}$

Höhe: $2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$

Aufgabe 14.11



Zielfunktion:

$A(x,y) = x \cdot y$

Nebenbedingung:

$y = x^2 - 8x + 21$

Nebenbedingung in Zielfunktion einsetzen:

$A(x) = x(x^2 - 8x + 21) = x^3 - 8x^2 + 21x$

Extrema:

$A'(x) = 3x^2 - 16x + 21 = 0$

$A''(x) = 6x - 16$

$x_1 = 3,\ x_2 = \frac{7}{3}$

$A''(3) = 2 > 0$ (x_1 ist lokales Minimum)

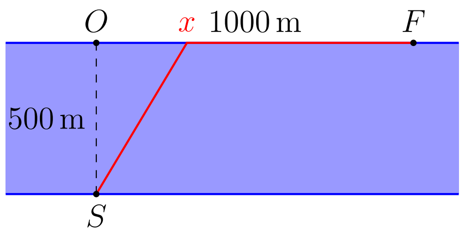
$A''(\frac{7}{3}) = -2 < 0$ (x_2 ist lokales Maximum)

$A(\frac{7}{3}) \approx 18.15$

Werte an den Rändern: $A(0) = 0$
$A(4) = 20$

Lösung: Das Maximum wird im Randpunkt $P(4, 5)$ angenommen.

Aufgabe 14.12



$$\overline{v} = \frac{s}{t} \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{s}{\overline{v}}$$

Zielfunktion:

$$T(s_1, s_2) = \frac{s_1}{\overline{v}_1} + \frac{s_2}{\overline{v}_2}$$

Nebenbedingungen:

$s_1 = \sqrt{500^2 + x^2}$

$s_2 = 1000 - x$

Nebenbedingungen in Zielfunktion einsetzen:

$$T(x) = \frac{\sqrt{500^2 + x^2}}{50} + \frac{1000 - x}{300} \qquad ([t] = \text{Minuten})$$

Extrema:

$$T'(x) = \frac{1 \cdot 2x}{50 \cdot 2\sqrt{500^2 + x^2}} - \frac{1}{300} = \frac{x}{50\sqrt{500^2 + x^2}} - \frac{1}{300}$$

$$\frac{x}{50\sqrt{500^2+x^2}} - \frac{1}{300} = 0 \quad || \cdot 300\sqrt{500^2+x^2}$$

$$6x - \sqrt{500^2+x^2} = 0$$

$$6x = \sqrt{500^2+x^2}$$

$$36x^2 = 500^2 + x^2$$

$$35x^2 = 500^2$$

$$x = 500/\sqrt{35} \approx 84.51\,\mathrm{m}$$

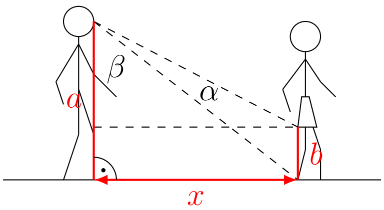
Lösung:

Dauer: $T(84.51) \approx 13.2\,\mathrm{min}$

Streckenlänge:

$s(84.51) = \sqrt{500^2 + 84.51^2} + (1000 - 84.51) \approx 1422.5\,\mathrm{m}$

Aufgabe 14.13



Zielfunktion:

$\alpha(x, a, b) = (\alpha + \beta) - \beta = \arctan \dfrac{x}{a-b} - \arctan \dfrac{x}{a}$

Nebenbedingung:

$a = 1.78,\ b = 0.6,\ 0 < d < \infty$

Nebenbedingungen in Zielfunktion einsetzen:

$\alpha(x) = \arctan(sx) - \arctan(tx)$ mit $s = 1.18^{-1}$, $t = 1.78^{-1}$

Extrema:

$$\alpha'(x) = 0$$

$$\frac{s}{1+(sx)^2} - \frac{t}{1+(tx)^2} = 0$$

$$s\left[1+(tx)^2\right] = t\left[1+(sx)^2\right]$$

$$s + st^2x^2 = t + ts^2x^2$$

$$st^2x^2 - ts^2x^2 = t - s$$

$$x^2 st(t-s) = t - s \quad (t \neq s)$$

$$x^2 = (st)^{-1}$$

$$x = \sqrt{(st)^{-1}}$$

Lösung:
$s = 1.18^{-1}$, $t = 1.78^{-1} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{1.18 \cdot 1.78} = 1.45\,\mathrm{m}$