Aufgabe 13.1

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6ax + 2b$

$f(2) = 1 \quad \Rightarrow \quad 8a + 4b + 2c + d = 1$
$f'(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 12a + 4b + c = 0$
$f''(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 12a + 2b = 0$
$f(4) = 0 \quad \Rightarrow \quad 64a + 16b + 4c + d = 0$

Lösung: $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$

Aufgabe 13.2

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6ax + 2b$

$f(-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad -8a + 4b - 2c + d = 0$
$f''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$
$f'(0) = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{3}$
$f(0) = g(0) \quad \Rightarrow \quad d = 2$

Lösung: $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x + 2$

Aufgabe 13.3

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 8a + 4b + 2c + d = 0$
$f'(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 12a + 4b + c = 0$
$f(-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad -8a + 4b - 2c + d = 0$
$f'(-2) = 1 \quad \Rightarrow \quad 12a - 4b + c = 1$
Lösung: $f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

Aufgabe 13.4

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx$
$f'(x) = 3ax^2 + b$

$f(-2) = -4 \quad \Rightarrow \quad -8a - 2b = -4 \quad \Rightarrow \quad 4a + b = 2$

$f'(-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 12a + b = 0$

Lösung: $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x$

Aufgabe 13.5

Ansatz:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Wenn $f(x)$ durch $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$ teilbar ist, so muss f die Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$ haben.

$f(-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad -8a + 4b - 2c + d = 0$

$f(3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 27a + 9b + 3c + d = 0$

$f(1) = 6 \quad \Rightarrow \quad a + b + c + d = 6$

$f''(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6a + 2b = 0$

Lösung: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

Aufgabe 13.6

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

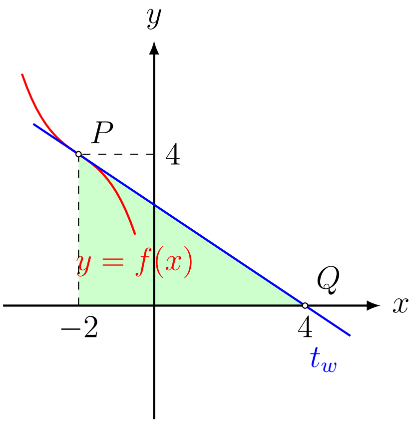
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

- $O(0,0) \in G_f$: $\quad f(0) = 0$, $\quad d = 0$
- $P(-2,4) \in G_f$: $\quad f(-2) = 4$, $\quad -8a + 4b - 2c + d = 4$
- $P(-2,4)$ ist Wendepunkt: $\quad f''(-2) = 0$, $\quad -12a + 2b = 0$
- t_w hat bei $x = -2$ die Steigung m_{PQ}: $\quad f'(-2) = -\frac{2}{3}$, $\quad 12a - 4b + c = -\frac{2}{3}$

Lösung: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - \frac{14}{3}x$

Hinweis zu Aufgabe 13.6



$$f'(-2) = m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-4}{4-(-2)} = -\frac{2}{3}$$

Aufgabe 13.7

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx$ (Symmetrie berücksichtigt)

$$f'(x) = 3ax^2 + b$$

$$f''(x) = 6ax$$

- t_w in $O(0,0)$ hat die Steigung $m = \frac{-9}{16}$

  $f'(0) = b = \frac{-9}{16}$

- $y = x$ schneidet G_f bei $x = \frac{5}{4}$

  $f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{125}{64}a + \frac{5}{4}b = \frac{5}{4}$

Lösung: $f(x) = x^3 - \frac{9}{16}x$

Aufgabe 13.8

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$f(0) = -2$: $d = -2$

$f(2) = 0$: $8a + 4b + 2c + d = 0$

$f'(3) = 0$: $27a + 6b + c = 0$

$f''(2) = 0$: $12a + 2b = 0$

Lösung: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$; $f''(x) = 6x - 12$; $f'''(x) = 6$

Ist $x = 3$ eine Maximalstelle?

$f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0 \Rightarrow x = 3$ ist Minimalstelle!