# Lineare Algebra

## Übungen

**Aufgabe 1.1**

Welche der folgenden Gleichungen mit den Unbekannten $x_1$, $x_2$ und $x_3$ sind linear?

(a) $x_1 + 5x_2 - \sqrt{2}\,x_3 = 1$

(b) $x_1 + 3x_2 + x_1x_2 = 2$

(c) $x_1 = -7x_2 + 3x_3$

(d) $x_1^{-2} + x_2 + 8x_3 = 5$

**Aufgabe 1.2**

Sei $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine reelle Konstante. Welche der folgenden Gleichungen sind linear?

(a) $x_1 - x_2 + x_3 = \sin k$

(b) $kx_1 - k^{-1}x_2 = 9$

(c) $2^k x_1 + 7x_2 - x_3 = 0$

**Aufgabe 1.3**

Bestimme die Lösungsmenge der linearen Gleichung $7x - 5y = 3$.

**Aufgabe 1.4**

Bestimme die Lösungsmenge der linearen Gleichung $3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 7$.

**Aufgabe 1.5**

Bestimme die Lösungsmenge der linearen Gleichung $8x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1$.

**Aufgabe 1.6**

Bestimme die Lösungsmenge der linearen Gleichung $3x_1 - 8x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0$.

**Aufgabe 1.7**

Stelle die erweiterte Matrix des Gleichungssystems auf.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= -1 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 3 \\ 7x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned}$$

### Aufgabe 1.8

Stelle die erweiterte Matrix des Gleichungssystems auf.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

### Aufgabe 1.9

Welches lineare Gleichungssystem entspricht der folgenden erweiterten Matrix?

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 1.10

Welches lineare Gleichungssystem entspricht der folgenden erweiterten Matrix?

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 1.11

Welche lineare Gleichung mit den Unbekannten $x$ und $y$ hat die allgemeine Lösung $x = 5 + 2t$, $y = t$?

### Aufgabe 1.12

Welche lineare Gleichung mit den Unbekannten $x$, $y$ und $z$ hat die allgemeine Lösung $x = 1 - 4s + 3t$, $y = s$, $z = t$?

**Aufgabe 2.1**

Welche der folgenden Matrizen haben reduzierte Zeilenstufenform?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 2.2**

Welche der folgenden Matrizen haben reduzierte Zeilenstufenform?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 2.3**

Welche der folgenden Matrizen haben Zeilenstufenform?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 2.4**

Charakterisiere die Form der Matrizen.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 2.5**

Gib die Lösung des linearen Gleichungssystems an, dessen erweiterte Matrix auf reduzierte Zeilenstufenform gebrachte wurde.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 2.6**

Gib die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems an, dessen erweiterte Matrix auf reduzierte Zeilenstufenform gebrachte wurde.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 2.7**

Gib die Lösung des linearen Gleichungssystems an, dessen erweiterte Matrix auf Zeilenstufenform gebrachte wurde.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 2.8**

Löse das Gleichungssystem durch Gauss-Jordan-Elimination.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned}$$

**Aufgabe 2.9**

Löse das Gleichungssystem durch Gauss-Jordan-Elimination:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 &= -1 \end{aligned}$$

**Aufgabe 2.10**

Löse das Gleichungssystem durch Gauss-Jordan-Elimination:

$$\begin{aligned} x - y + 2z - w &= -1 \\ 2x + y - 2z - 2w &= -2 \\ -x + 2y - 4z + w &= 1 \\ 3x - 3w &= -3 \end{aligned}$$

**Aufgabe 2.11**

Löse das Gleichungssystem durch Gauss-Jordan-Elimination:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$

**Aufgabe 2.12**

Löse das Gleichungssystem durch Gauss-Jordan-Elimination:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -15 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11 \\ -6x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 30 \end{aligned}$$

**Aufgabe 2.13**

Man bestimme ohne Rechnung, welche der folgenden homogenen Systeme nichttriviale Lösungen haben.

(a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= 0 \\ 7x_1 + x_2 - 8x_3 + 9x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 - 8x_3 &= 0 \\ 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

**Aufgabe 2.14**

Man löse das folgende homogene Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

**Aufgabe 2.15**

Man löse das folgende homogene Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

**Aufgabe 2.16**

Man transformiere

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

auf reduzierte Zeilenstufenform, ohne Brüche zu erzeugen.

**Aufgabe 2.17**

Für welche Werte von $a$ hat das folgende System keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen?

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2 \end{aligned}$$

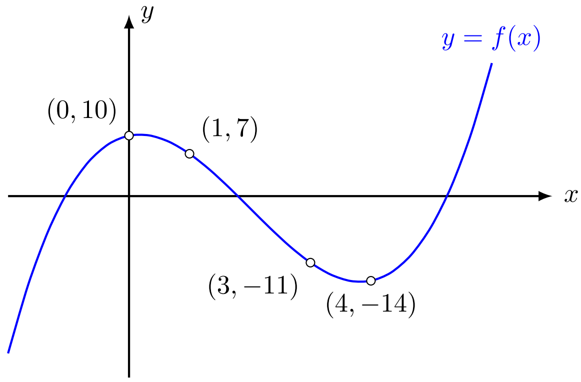
### Aufgabe 2.18

Für welche Werte von $\lambda$ hat das folgende Gleichungssystem nichttriviale Lösungen?

$$\begin{aligned}(\lambda-3)x+y&=0\\ x+(\lambda-3)y&=0\end{aligned}$$

### Aufgabe 2.19

Die Abbildung unten zeigt den Graphen der kubischen Gleichung $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Man bestimme die Koeffizienten $a$, $b$, $c$ und $d$.




### Aufgabe 2.20

Man zeige: Für $ad - bc \neq 0$ ergibt sich die reduzierte Zeilenstufenform von

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{zu} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Aufgabe 3.1

Gegeben: Matrizen $A$, $B$, $C$, $D$ und $E$ der folgenden Grössen:

$$\underset{(4\times 5)}{A} \quad \underset{(4\times 5)}{B} \quad \underset{(5\times 2)}{C} \quad \underset{(4\times 2)}{D} \quad \underset{(5\times 4)}{E}$$

Man entscheide, welche der folgenden Matrizen definiert sind, und gebe die Grösse der entsprechenden Matrix an.

(a) $BA$

(b) $AC + D$

(c) $AE + B$

(d) $AB + B$

(e) $E(A + B)$

(f) $E(AC)$

(g) $E^T A$

(h) $(A^T + E)D$

### Aufgabe 3.2

Man löse die folgende Matrixgleichung für $a$, $b$, $c$ und $d$.

$$\begin{pmatrix} a-b & b+c \\ 3d+c & 2a-4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 3.3

$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Berechne die folgenden Ausdrücke, sofern sie definiert sind.

(a) $A + B$

(b) $A - B$

(c) $A - A$

### Aufgabe 3.4

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Berechne die folgenden Ausdrücke, sofern sie definiert sind.

(a) $5A$

(b) $-7A$

(c) $\frac{1}{2}A$

### Aufgabe 3.5

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechne die folgenden Ausdrücke, sofern sie definiert sind.

(a) $2A - B$

(b) $5A + 4C$

(c) $-3(B - 2D)$

### Aufgabe 3.6

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechne die folgenden Ausdrücke, sofern sie definiert sind.

(a) $A + A^{\mathrm{T}}$

(b) $B^{\mathrm{T}} + B$

(c) $A^{\mathrm{T}} - B$

(d) $\left(A - B^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$

(e) $B + C^{\mathrm{T}}$

(f) $C^{\mathrm{T}} + D$

(g) $4A + D^{\mathrm{T}}$

(h) $\left(2A^{\mathrm{T}} + 3B^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$

**Aufgabe 3.7**

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Berechne die folgenden Ausdrücke, sofern sie definiert sind.

(a) $AB$

(b) $BA$

(c) $BC$

(d) $CB$

(e) $CD$

(f) $(A + B)C$

(g) $AB + AC$

(h) $(AB)C$

(i) $A(BC)$

(j) $ABCD$

**Aufgabe 3.8**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Berechne die folgenden Ausdrücke, sofern sie definiert sind.

(a) $AA^{\mathrm{T}}$

(b) $A^{\mathrm{T}}A$

(d) $\left(A^{\mathrm{T}}B\right)^{\mathrm{T}}$

(c) $AB^{\mathrm{T}}$

(e) $B^{\mathrm{T}}A$

(f) $CC^{\mathrm{T}}$

(g) $C^{\mathrm{T}}C$

(h) $\left(A + BB^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$

**Aufgabe 3.9**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Berechne die folgenden Ausdrücke, sofern sie definiert sind.

(a) $\operatorname{tr} A$

(b) $\operatorname{tr} 2A$

(c) $\operatorname{tr}\left(A + B\right)$

(d) $\operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$

(c) $\operatorname{tr}\left(A + A^{\mathrm{T}}\right)$

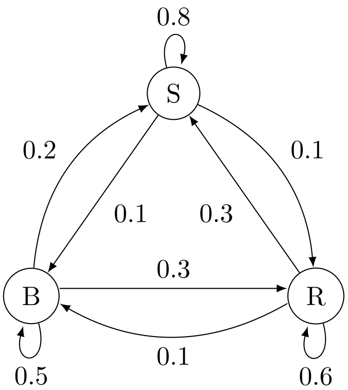
(e) $\operatorname{tr}(AB)$

(f) $\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$

(g) $\operatorname{tr} A^2$

### Aufgabe 4.1

In einer Region wird der Verlauf des Wetters von Tag zu Tag durch folgenden gerichteten Graphen beschrieben. Die Kantengewichte beschreiben die Wahrscheinlichkeiten (relativen Häufigkeiten) des Wetterübergangs.



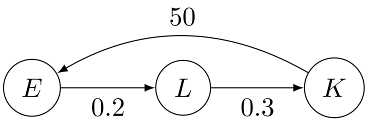

(a) Stelle die Wetteränderungen in einer Übergangsmatrix dar.

(b) Heute ist es regnerisch. Wie wahrscheinlich ist es, dass es nach 3 Tagen schön ist?

(c) Wie viele Tage pro Monat ist es in der Region im Mittel regnerisch? *Hinweis:* Untersuche das langfristige Verhalten mit Hilfe der Übergangsmatrix.

### Aufgabe 4.2

Wir betrachten ein Entwicklungsmodell für eine Käferpopulation, in der es vier Zustände gibt, die nacheinanander durchlaufen werden: Ei, Larve, Käfer.




Die Zahlen über den Kanten von links nach rechts stellen die *Überlebensraten* der einzelnen Stadien dar; der Wert über der Kante von $K$ nach $E$ die *Reproduktionsrate* (pro Jahr) dar.

(a) Stelle die jährliche Entwicklung der Population durch eine Übergangsmatrix dar.

(b) Eine Startpopulation von 1000 Eiern, 500 Larven und 100 Käfern wird unter Laborbedingungen beobachtet. Stelle die Anzahl der Käfer während 6 Zeitschritten in einer Zeitreihe dar.

(c) Wie beurteilst du die langfristige Entwicklung der Käferpopulation, wenn es keine Ressourcenknappheit gibt?

**Aufgabe 4.3**

Auf dem Mars leben im Mittel 250 000 Aliens. Zu Beginn des aktuellen Marsjahres (712) sind 190 000 von ihnen grün; die übrigen Alines sind blau.

Wegen der fehlenden Atmosphäre, gelangt die kosmische Strahlung ungefiltert auf die Marsoberfläche und verursacht Farbveränderungen. Auf diese Weise werden jährlich 35% der grünen Aliens blau und 95% der blauen Aliens grün. Die übrigen Ausserirdischen behalten ihre Hautfarbe.

Wie viele grüne und blaue Aliens gibt es nach

(a) 1 Marsjahr,

(b) 5 Marsjahren,

(c) 50 Marsjahren?

**Aufgabe 5.1**

Man berechne mit dem Satz aus dem Skript die Inverse der Matrix $A$, sofern sie existiert.

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 5.2**

Seien $A$ und $B$ quadratische Matrizen gleichen Formats. Gilt dann $(AB)^2 = A^2B^2$? Begründe deine Antwort.

**Aufgabe 5.3**

Berechne die Matrix $A$:

(a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $(7A)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

(c) $(5A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $(I + 2A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 5.4**

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Berechne:

(a) $A^3$

(b) $A^{-3}$

(c) $A^2 - 2A + I$

**Aufgabe 5.5**

Berechne die Inverse von $M = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

**Aufgabe 5.6**

Man betrachte die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

mit $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, $\dots$, $a_{nn} \neq 0$. Man zeige dass $A$ invertierbar ist und berechne ihre Inverse.

**Aufgabe 5.7**

Die quadratische Matrix $A$ genüge der Gleichung $A^2 - 3A + I = 0$. Man zeige, dass $A^{-1} = 3I - A$ ist.

**Aufgabe 5.8**

Man zeige, dass eine Matrix, die eine Nullzeile enthält, nicht invertierbar ist.

**Aufgabe 5.9**

Die reelle Gleichung $a^2 = 1$ hat genau zwei Lösungen. Man bestimme vier verschiedene $3 \times 3$-Matrizen, die die Gleichung $A^2 = I$ erfüllen. *Hinweis:* Betrachte die Lösungen, die ausserhalb der Diagonalen nur Nullen enthalten.

**Aufgabe 5.10**

(a) Man bestimme eine $3 \times 3$-Matrix $A \neq 0$ mit $A^T = A$.

(b) Man bestimme eine $3 \times 3$-Matrix $A \neq 0$ mit $A^T = -A$.

**Aufgabe 5.11**

Eine quadratische Matrix $A$ heisst *symmetrisch*, wenn $A^T = A$ gilt; sie heisst *schiefsymmetrisch*, falls $A^T = -A$ ist. Man zeige für eine quadratische Matrix $B$:

(a) $B + B^T$ ist symmetrisch

(b) $BB^T$ ist symmetrisch

(c) $B - B^T$ ist schiefsymmetrisch

**Aufgabe 5.12**

Beweise mit vollständiger Induktion nach $n$: Für eine quadratische Matrix $A$ und eine natürliche Zahl $n$ gilt stets $(A^n)^T = (A^T)^n$

**Aufgabe 5.13**

Untersuche, ob die Matrix $A$ periodisch, nilpotent oder idempotent ist. Falls ja, gib die Periode $p$ bzw. den Index $k$ an.

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$