Lineare Algebra

5. Klasse PAM

Version: 7. Mai 2018

1 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

Das Studium linearer Gleichungssysteme und ihrer Lösungen ist eines der wichtigsten Themen der linearen Algebra. Wir werden zunächst einige grundlegende Begriffe vorstellen sowie eine Methode zur Lösung der Systeme diskutieren.

1.1 Einführung in die linearen Gleichungssysteme

Lineare Gleichungen

Eine Gerade in der xy-Ebene kann algebraisch durch eine Gleichung der Form

$$a_1x + a_2y = b$$

dargestellt werden. Eine derartige Gleichung nennen wir linear mit den Variablen x und y. Allgmein hat eine *lineare Gleichung* mit n Variablen (oder *Unbekannten*) x_1, x_2, $\dots$, x_n die Gestalt

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

wobei a_1, a_2, $\dots$, a_n und b reelle Konstanten sind.

Beispiel 1.1

Die folgenden Gleichungen sind linear:

- $x + 3y = 7$
- $x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 7$
- $y = \frac{1}{2}x + 3z + 1$
- $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$

Man beachte, dass eine lineare Gleichung keine Produkte oder Wurzeln ihrer Variablen enthält. Alle Unbekannten stehen nur in der ersten Potenz und erscheinen nicht als Argumente von trigonometrischen, logarithmischen oder Exponentialfunktionen. Die folgenden Gleichungen sind nicht linear:

- $x + 3\sqrt{y} = 7$
- $3x + 2y - z + xz = 4$
- $y - \sin x = 0$
- $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$

Eine *Lösung* der linearen Gleichung

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

besteht aus n Zahlen $s_1,\ s_2,\ \ldots s_n$ mit der Eigenschaft, dass die Gleichung durch die Substitution

$$x_1 = s_1,\ x_2 = s_2,\ \ldots,\ x_n = s_n$$

erfüllt wird. Die Gesamtheit aller Lösungen heisst *Lösungsmenge* oder *allgemeine Lösung* der Gleichung.

Beispiel 1.2

Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $4x - 2y = 1$.

Lösungsvariante A: Man setzt für x einen beliebigen Wert t ein und löst dann die Gleichung nach y auf:

$x = t \quad \Rightarrow \quad 4t - 2y = 1$
$y = 2t - \frac{1}{2}$

Diese Formeln beschreiben die Lösungsmenge in Abhängigkeit von t. Einzelne Lösungen erhalten wir durch Einsetzen entsprechender Zahlenwerte für t.

Beispielsweise liefert $t = 3$ die Lösung $x = 3$, $y = 5.5$.

Lösungsvariante B: Man setzt für y einen beliebigen Wert s ein und löst dann die Gleichung nach x auf:

$y = s \quad \Rightarrow \quad 4x - 2s = 1$
$x = 0.25 + 0.5s$

Obwohl diese Formeln sich von den obenstehenden unterscheiden, beschreiben sie dieselbe Lösungsmenge, wenn s die reellen Zahlen durchläuft.

Beispielsweise liefert hier $s = 5.5$ dieselbe Lösung wie oben: $x = 3$, $y = 5.5$

Beispiel 1.3

Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 5$.

Lösung: Wir belegen zwei der drei Variablen mit beliebigen Werten und lösen nach der dritten auf. Identifizieren wir also x_2 und x_3 mit s und t, so erhalten wir nach Umstellung der Gleichung

$$x_1 = 5 + 4s - 7t$$
$$x_2 = s$$
$$x_3 = t$$

1.2 Lineare Systeme

Eine endliche Menge linearer Gleichungen mit den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ heisst *lineares Gleichungssystem* oder kurz *lineares System*. Eine Folge von Zahlen $s_1, s_2, \ldots, s_n$ heisst *Lösung* des Systems, wenn sie alle vorkommenden Gleichungen löst. Beispielsweise hat das System

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 &= -4 \end{aligned}$$

die Lösung $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, da diese Werte *beide* Gleichungen erfüllen. Die Zahlen $x_1 = 1$, $x_2 = 8$, $x_3 = 1$, die nur die erste Gleichung lösen, sind keine Lösung des Systems.

Nicht jedes lineare Gleichungssystem besitzt Lösungen. Multiplizieren wir etwa die zweite Gleichung von

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 2x + 2y &= 6 \end{aligned}$$

mit $\frac{1}{2}$, so erhalten wir das äquivalente System

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$

dessen Gleichungen einander widersprechen. Offensichtlich ist dieses System nicht lösbar.

Ein System, das keine Lösung besitzt, heisst *inkonsistent*, während wir lösbare Systeme als *konsistent* bezeichnen.

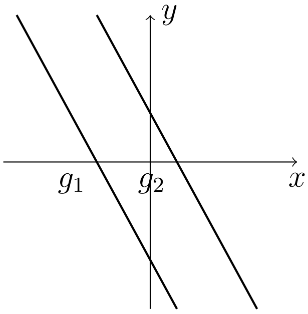
Um die unterschiedlichen Möglichkeiten zu untersuchen, die beim Lösen linearer Gleichungssysteme auftreten können, betrachten wir ein allgemeines System von zwei Gleichungen in den Variablen x und y:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \quad \text{mit} \quad a_1 \neq 0 \quad \text{oder} \quad b_1 \neq 0 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \quad \text{mit} \quad a_2 \neq 0 \quad \text{oder} \quad b_2 \neq 0 \end{aligned}$$

Die Graphen dieser Gleichungen sind zwei Geraden g_1 und g_2. Da ein Punkt (x, y) genau dann auf einer Geraden liegt, wenn seine Komponenten x und y die zugehörige Gleichung erfüllen, entsprechen die Lösungen unseres Gleichungssystems gerade den Schnittpunkten von g_1 und g_2. Daraus ergeben sich drei Möglichkeiten:

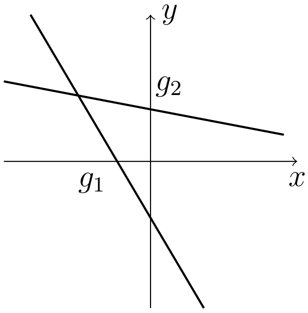
Möglichkeit 1

g_1 und g_2 sind parallel. Dann existieren keine Schnittpunkte, also hat das Gleichungssystem keine Lösung



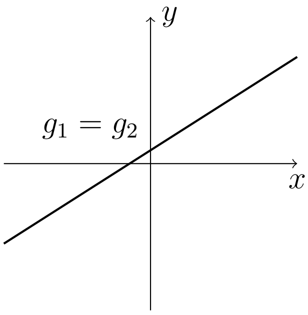
Möglichkeit 2

g_1 und g_2 schneiden sich in genau einem Punkt. Das Gleichungssystem hat dann eine eindeutig bestimmte Lösung.



Möglichkeit 3

g_1 und g_2 stimmen überein. Es gibt unendlich viele Schnittpunkte und damit unendlich viele Lösungen des Gleichungssystems.



Wir werden später sehen, dass für jedes beliebige lineare System genau einer dieser drei Fälle in Betracht kommt:

> *Ein lineares Gleichungssystem hat entweder keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen.*

Allgemein schreiben wir ein System von m linearen Gleichungen mit n Unbekannten als

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

wobei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Variablen und die a's und die b's Konstanten bezeichnen.

So hat ein System von drei Gleichungen mit vier Unbekannten die allgemeine Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \end{aligned}$$

Die doppelte Indexierung der Koeffizienten erlaubt es, diese Zahlen innerhalb des Systems zu lokalisieren. Der erste Index von a_{ij} gibt an, in welcher Gleichung der Koeffizient steht, während der zweite Index der Nummer der zugehörigen Variablen entspricht. Also erscheint a_{12} in der ersten Gleichung als Faktor von x_2.

1.3 Erweiterte Matrizen

Indem wir uns die Positionen von „+“, „x“ und „=“ merken, können wir ein System von m Gleichungen mit n Unbekannten durch das folgende rechteckige Zahlenschema darstellen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Dieses Schema heisst *erweiterte Matrix* des Systems.

Als erweiterte Matrix des Gleichungsystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

erhält man also

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Beim Aufstellen der erweiterten Matrix müssen die Unbekannten in allen Gleichungen in derselben Reihenfolge auftreten.

Die grundlegende Lösungsmethode für lineare Gleichungssysteme basiert darauf, dass man das gegebene System durch ein neues ersetzt, dessen Lösung mit der des ursprünglichen Systems übereinstimmt, aber leichter zu bestimmen ist. Im allgemeinen erhält man dieses neue System in mehreren Schritten, indem man mit Hilfe der folgenden drei Operationen die Unbekannten systematisch eliminiert:

- Multiplikation einer Gleichung mit einer von Null verschiedenen Konstanten,
- Vertauschen von zwei Gleichungen,
- Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung.

Da die Zeilen der erweiterten Matrix den Gleichungen des zugehörigen Systems entsprechen, liefern die oben genannten Schritte folgende Zeilenoperationen innerhalb der erweiterten Matrix:

- Multiplikation einer Zeile mit einer von Null verschiedenen Konstanten,
- Vertauschen von zwei Zeilen,
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

1.4 Elementare Zeilenumformungen

Diese Regeln bezeichnet man als *elementare Zeilenumformungen*. Das folgende Beispiel zeigt, wie die Operationen beim Lösen linearer Gleichungssysteme eingesetzt werden können. Da wir im nächsten Abschnitt eine allgemeine Lösungsmethode herleiten werden, ist es hier nicht von Belang, warum die einzelnen Schritte durchgeführt werden. Der Leser sollte sich vielmehr auf die Rechnungen und deren Erläuterungen konzentrieren.

Beispiel 1.4

In der linken Spalte lösen wir das lineare Gleichungssystem durch Manipulation der Gleichungen. In der rechten Spalte führen wir jeweils die entsprechenden Zeilenoperationen für die zugehörige erweiterte Matrix durch.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 1

Addition des (-2)fachen der ersten Gleichung zur zweiten:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

Addition des (-2)fachen der ersten Zeile zur zweiten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 2

Addition des (-3)fachen der ersten Gleichung zur dritten:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

Addition des (-3)fachen der ersten Zeile zur dritten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{pmatrix}$$

Schritt 3

Multiplikation der zweiten Gleichung mit $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned}$$

Multiplikation der zweiten Zeile mit $\frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{pmatrix}$$

Schritt 4

Addition des (-3)fachen der zweiten Gleichung zur dritten:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ -\tfrac{1}{2}z &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Addition des (-3)fachen der zweiten Zeile zur dritten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Schritt 5

Multiplikation der dritten Gleichung mit -2:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Multiplikation der dritten Zeile mit -2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Schritt 6

Addition des (-1)fachen der zweiten Gleichung zur ersten:

$$\begin{aligned} x + \tfrac{11}{2}z &= \tfrac{35}{2} \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Addition des (-1)fachen der zweiten Zeile zur ersten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Schritt 7

Addition des $(-\frac{11}{2})$fachen der dritten Gleichung zur ersten

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Addition des $(-\frac{11}{2})$fachen der dritten Zeile zur zur ersten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Schritt 8

Addition des $\frac{7}{2}$fachen der dritten Gleichung zur zweiten:

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Addition des $\frac{7}{2}$fachen der dritten Zeile zur zweiten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Systems ist jetzt offensichtlich

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3.$$

2 Gaussssches Eliminationsverfahren

Wir entwickeln ein Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme. Die grundlegende Idee ist, die erweiterte Matrix in eine einfache Form zu bringen, die es erlaubt, die Lösungen des Gleichungssystem ablesen zu können.

2.1 Reduzierte Zeilenstufenform

In Beispiel 3 des letzten Abschnitts haben wir das vorgegebene lineare System dadurch gelöst, dass wir die erweiterte Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

umgeformt haben, so dass die Lösung des Systems offensichtlich war. Diese Matrix befindet sich in *reduzierter Zeilenstufenform*, welche durch folgende Eigenschaften charakterisiert ist:

1. Wenn eine Zeile nicht nur aus Nullen besteht, so ist die erste von Null verschiedene Zahl eine Eins (*führende Eins*).
2. Alle Zeilen, die ausschliesslich Nullen enthalten, stehen am Ende der Matrix.
3. In zwei aufeinanderfolgenden Zeilen, die nichtverschwindende Elemente besitzen, steht die führende Eins der untereren Zeile rechts von der führenden Eins der oberen Zeile.
4. Eine Spalte, die eine führende Eins enthält, hat keine weiteren von Null verschiedene Einträge.

Eine Matrix, die nur die Bedingungen 1, 2 und 3 erfüllt (aber nicht notwendig Bedingung 4), hat *Zeilenstufenform*.

Beispiele von Matrizen in reduzierter Zeilenstufenform

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiele von Matrizen in Zeilenstufenform

$$A\begin{pmatrix}1 & 4 & 3 & 7\\ 0 & 1 & 6 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 5\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Man sollte sich davon überzeugen, dass die angegebenen Matrizen die notwendigen Bedingungen erfüllen.

Bemerkung

Wie man im vorangehenden Beispiel sieht, stehen unter einer führenden Eins nur Nullen, wenn die Matrix in Zeilenstufenform vorliegt; hat die Matrix reduzierte Zeilenstufenform, so stehen auch über einer führenden Eins nur Nullen. Nachdem man die erweiterte Matrix eines linearen Gleichungssystems durch elementare Zeilenoperationen auf reduzierte Zeilenstufenform gebracht hat, lässt sich die Lösungsmenge des Systems sofort – im schlimmsten Fall nach einigen leichten Umformungen – ablesen. Das folgende Beispiel soll diesen Sachverhalt veranschaulichen.

Wir gehen davon aus, dass die erweiterte Matrix eines linearen Gleichungssystems durch Zeilenumformungen auf die gegebene reduzierte Zeilenstufenform gebracht wurde, und bestimmen daraus die Lösung des Systems.

Beispiel 2.1

Aus der reduzierten Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

ergibt sich das zugehörigen Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1 &= 5\\ x_2 &= -2\\ x_3 &= 4\end{aligned}$$

und daraus sofort $x_1 = 5$, $x_2 = -2$, $x_3 = 4$.

Beispiel 2.2

Aus der reduzierten Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 4 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

ergibt sich das zugehörige Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
x_1 + 4x_4 &= -1 \\
x_2 + 2x_4 &= 6 \\
x_3 + 3x_4 &= 2
\end{aligned}$$

Da x_1, x_2 und x_3 den führenden Einsen der erweiterten Matrix entsprechen, bezeichnen wir sie als *führende Variablen*, die übrigen Variablen (hier x_4) nennen wir *freie Variablen*. Durch Auflösen der Gleichung nach den führenden Variablen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
x_1 &= -1 - 4x_4 \\
x_2 &= 6 - 2x_4 \\
x_3 &= 2 - 3x_4
\end{aligned}$$

Da x_4 einen beliebigen Wert t annehmen kann, hat das System unendlich viele Lösungen:

$$\begin{aligned}
x_1 &= -1 - 4t \\
x_2 &= 6 - 2t \\
x_3 &= 2 - 3t \\
x_4 &= t
\end{aligned}$$

Beispiel 2.3

Aus der reduzierten Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
x_1 + 6x_2 + 4x_5 &= -2 \\
x_3 + 3x_5 &= 1 \\
x_4 + 5x_5 &= 2
\end{aligned}$$

Die führenden Variablen sind x_1, x_3 und x_4, während x_2 und x_5 frei sind. Durch Auflösen nach den führenden Variablen ergibt sich:

$$\begin{aligned}
x_1 &= -2 - 6x_2 - 4x_5 \\
x_3 &= 1 - 3x_5 \\
x_4 &= 2 - 5x_5
\end{aligned}$$

x_2 und x_5 können beliebige Werte s und t annehmen, also gibt es unendlich viele Lösungen:

$$\begin{aligned}
x_1 &= -2 - 6s - 4t \\
x_2 &= s \\
x_3 &= 1 - 3t \\
x_4 &= 2 - 5t \\
x_5 &= t
\end{aligned}$$

Beispiel 2.4

Die reduzierten Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entspricht dem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

Da die letzte Zeile der Matrix nie erfüllt werden kann, ist das System nicht lösbar.

2.2 Gauss-Elimination

Wir haben gerade gesehen, wie leicht es ist, ein lineares Gleichungssystem zu lösen, dessen erweiterte Matrix zur reduzierten Zeilenstufenform umgeformt ist.

Jetzt werden wir ein Verfahren angeben, mit dem jede Matrix schrittweise in diese Form gebracht werden kann. Zur Veranschaulichung werden wir die einzelnen Schritte auf die folgende Matrix anwenden, um sie in die gewünschte Gestalt zu verwandeln:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Schritt 1A

Man bestimme die am weitesten links stehende Spalte, die von Null verschiedene Elemente enthält. Im Beispiel enthält die erste Spalte von Null verschiedene Elemente.

$$\begin{pmatrix} \color{blue}{0} & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ \color{blue}{2} & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ \color{blue}{2} & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Schritt 1B

Ist die oberste Zahl der in Schritt 1A gefundenen Spalte eine Null, so vertausche man die erste Zeile mit einer geeigneten anderen Zeile.

Die erste und zweite Zeile der Matrix werden vertauscht:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Schritt 1C

Ist $a \neq 0$ das erste Element der in Schritt 1B gefundenen Spalte, so multipliziere man die erste Zeile mit a^{-1} um eine führende Eins zu erzeugen.

Die erste Zeile der Matrix wird mit $\frac{1}{2}$ multipliziert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Schritt 1D

Man addiere passende Vielfache der ersten Zeile zu den übrigen. Zeilen, um unterhalb der führenden Eins Nullen zu erzeugen.

Das (-2)fache der ersten Zeile wird zur dritten addiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix}$$

Schritt 2A

Man wende die ersten vier Schritte auf die Untermatrix an, die durch Streichen der ersten Zeile entsteht und wiederhole dieses Verfahren, bis die Matrix Zeilenstufenform hat.

Die dritte Kolonne ist die erste nichtverschwindende Spalte der Untermatrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ \color{blue}0 & \color{blue}0 & \color{blue}-2 & \color{blue}0 & \color{blue}7 & \color{blue}12 \\ \color{blue}0 & \color{blue}0 & \color{blue}5 & \color{blue}0 & \color{blue}-17 & \color{blue}-29 \end{pmatrix}$$

Schritt 2B

Da die oberste Zahl in der dritten Spalte der Untermatrix nicht null ist, ist keine Zeilenvertauschung nötig.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix}$$

Schritt 2C

Ist $a \neq 0$ das erste Element der in Schritt 2B gefundenen Spalte, so multipliziere man die erste Zeile der Untermatrix mit a^{-1} um eine führende Eins zu erzeugen.

Die erste Zeile der Untermatrix ist mit $-\frac{1}{2}$ zu multiplizieren, um eine führende Eins zu erhalten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix}$$

Schritt 2D

Man addiere passende Vielfache der ersten Zeile der Untermatrix zu den übrigen, um unterhalb der führenden Eins Nullen zu erzeugen.

Das (-5)fache der ersten Zeile der Untermatrix ist zur zweiten zu addieren.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 3A

Wir betrachten jetzt die Untermatrix die durch Streichen der ersten zwei Zeilen ensteht und bestimmen dort die erste Kolonne, die nich nur aus Nullen besteht.

Offenbar ist die 5-te Kolonne die erste nichtverschwindende Spalte der Untermatrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ \color{blue}0 & \color{blue}0 & \color{blue}0 & \color{blue}0 & \color{blue}\frac{1}{2} & \color{blue}1 \end{pmatrix}$$

Schritt 3B

Da die erste und einzige Zeile der Untermatrix ein von Null verschiedenes Element enthält, ist eine Zeilenvertauschung weder nötig noch möglich.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 3C

Ist $a \neq 0$ das erste Element der in Schritt 3B gefundenen Spalte, so multipliziere man die erste Zeile der Untermatrix mit a^{-1} um eine führende Eins zu erzeugen. Die erste Zeile der Untermatrix wird mit 2 multipliziert, um eine führende Eins zu erzeugen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Schritt 3D

Schritt 3D entfällt, da die Untermatrix nur noch aus einer Zeile besteht.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Matrix liegt jetzt in Zeilenstufenform vor. Um die reduzierte Zeilenstufenform zu erhalten, benötigen wir einen zusätzliche Folge von Schritten.

Schritt 1E

Mit der letzten nichtverschwindenden Zeile beginnend, addiere man geeignete Vielfache jeder Zeile zu den darüberliegenden Zeilen, um über den führenden Einsen Nullen zu erzeugen.

Addiere das $-\frac{7}{2}$fache der dritten Zeile zur zweiten Zeile und das -6fache der dritten Zeile zur ersten Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Schritt 2E

Addiere das 5fache der zweiten Zeile zur ersten Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die letzte Matrix hat reduzierte Zeilenstufenform. Das oben beschriebene Verfahren zum Erzeugen der reduzierten Zeilenstufenform heisst *Gauss-Jordan-Elimination*. Die Schritte 1A bis 3D liefern die Zeilenstufenform und werden als *Gauss-Elimination* bezeichnet.

Bemerkung

Eine Matrix kann auf verschiedene Zeilenstufenformen gebracht werden, je nachdem, welche Zeilenumformungen man anwendet. Dagegen ist ihre reduzierte Zeilenstufenform eindeutig; man kann also auf eine gegebene Matrix unterschiedliche Folgen von Zeilenoperationen anwenden und erhält stets das gleiche Ergebnis.

Beispiel 2.4

Man löse durch Gauss-Jordan-Elimination:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6. \end{aligned}$$

Lösung

Die erweiterte Matrix des Systems ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{pmatrix}$$

Durch Addition des (-2)fachen der ersten Zeile zur zweiten und zur vierten Zeile erhält man:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{pmatrix}$$

Multiplikation der zweiten Zeile mit -1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{pmatrix}$$

Addition des (-5)fachen der zweiten Zeile zur dritten sowie des (-4)fachen der zweiten Zeile zur vierten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Vertauschen der dritten und vierten Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplikation der dritten Zeile mit $\frac{1}{6}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Zeilenstufenform)

Addition des (-3)fachen der dritten Zeile zur zweiten Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Addition des 2fachen der zweiten Zeile zur ersten Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(reduzierte Zeilenstufenform)

Die Matrix in reduzierter Zeilenstufenform entspricht folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung wurde weggelassen, da sie immer erfüllt wird.

Durch Auflösen der Gleichungen nach den führenden Variablen erhalten wir

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Wenn wir den freien Variablen x_2, x_4 und x_5 die Werte r, s und t zuordnen, ergibt sich die allgemeine Lösung aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= -3r - 4s - 2t \\ x_2 &= r \\ x_3 &= -2s \\ x_4 &= s \\ x_5 &= t \\ x_6 &= \tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

2.3 Rückwärtssubstitution

Beispiel 2.5

Es ist zuweilen günstiger, die erweiterte Matrix mittels Gauss-Elimination auf Zeilenstufenform zu bringen, ohne das gesamte Verfahren bis zur reduzierten Zeilenstufenform durchzuführen. Das Gleichungssystem, das man dabei erhält, kann dann durch sogenannte *Rückwärtssubstitution* gelöst werden. Wir veranschaulichen dieses Verfahren an dem in Beispiel 3 gegebenen Gleichungssystem. Mit den oben durchgeführten Rechnungen ergibt sich die erweiterte Matrix in Zeilenstufenform zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2.6

Um das dazu gehörende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_6 &= 1 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

zu lösen, gehen wir folgendermassen vor:

Schritt 1

Auflösen der Gleichungen nach den führenden Variablen.

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 + 2x_3 - 2x_5 \\ x_3 &= 1 - 2x_4 - 3x_6 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Schritt 2

Von der letzten Gleichung nach oben fortschreitend wird jede Gleichung in die übrigen eingesetzt.

Durch Einsetzen von $x_6 = \frac{1}{6}$ in die zweite Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 + 2x_3 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

Einsetzen von $x_3 = -2x_4$ in die erste Gleichung liefert

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

Schritt 3

Falls freie Variable vorkommen, werden ihnen beliebige Werte zugewiesen.

Wir identifizieren x_2, x_4 und x_5 mit r, s und t und erhalten dadurch erneut die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned}
x_1 &= -3r - 4s - 2t \\
x_2 &= r \\
x_3 &= -2s \\
x_4 &= s \\
x_5 &= t \\
x_6 &= \tfrac{1}{3}
\end{aligned}$$

Bemerkung

Die beliebigen Werte, die den freien Variablen zugewiesen werden, nennt man auch *Parameter*. Wir werden sie im allgemeinen mit den Buchstaben r, s, t, $\ldots$ bezeichnen, allerdings kann jeder Buchstabe, der nicht schon als Variablenname vergeben ist, verwendet werden.

Beispiel 2.7

Man löse

$$\begin{aligned}
x + y + 2z &= 9 \\
2x + 4y - 3z &= 1 \\
3x + 6y - 5z &= 0
\end{aligned}$$

durch Gauss-Elimination und Rückwärtssubstitution.

Lösung

Es handelt sich hier um das bereits in Beispiel 1.4 betrachtete System. Wie dort lässt sich die erweiterte Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

in die Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Das zugehörige Gleichungssystem lautet:

$$\begin{aligned}
x + y + 2z &= 9 \\
y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\
z &= 3
\end{aligned}$$

nach den führenden Variablen aufgelöst:

$$\begin{aligned}
x &= 9 - y - 2z \\
y &= -\tfrac{17}{2} + \tfrac{7}{2}z \\
z &= 3
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen der letzten Gleichung in die anderen ergibt sich:

$$\begin{aligned}
x &= 3 - y \\
y &= 2 \\
z &= 3
\end{aligned}$$

Einsetzen der zweiten Gleichung in die erste führt schliesslich zu:

$$\begin{aligned}
x &= 1 \\
y &= 2 \\
z &= 3
\end{aligned}$$

Dasselbe Ergebnis haben wir auch durch Gauss-Jordan-Elimination erhalten.

2.4 Homogene lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem heisst *homogen*, wenn alle konstanten Terme gleich null sind. Es hat also die allgemeine Form

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\quad\;\; \vdots \;\; &= \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}$$

Ein homogenes Gleichungssystem ist konsistent, da es immer die Lösung $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ hat. Diese Lösung heisst *triviale Lösung*.

Gibt es darüber hinaus weitere Lösungen, so werden sie als *nichttrivial* bezeichnet.

Da jedes homogene System trivial lösbar ist, muss genau eine der folgenden Aussagen wahr sein:

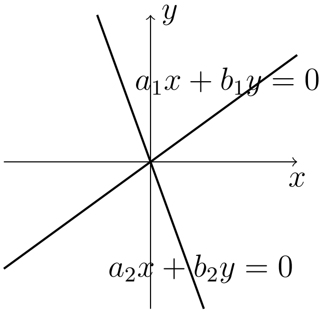
- Das System hat nur die triviale Lösung.
- Das System hat, zusätzlich zur trivialen Lösung, unendlich viele nichttriviale Lösungen.

Betrachten wir speziell ein homogenes System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten,

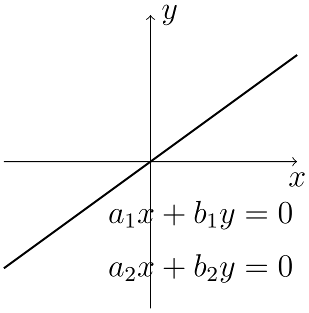
$$\begin{aligned}
a_1x + b_1y &= 0 \quad a_1 \neq 0 \text{ oder } \; b_1 \neq 0 \\
a_2x + b_2y &= 0 \quad a_2 \neq 0 \text{ oder } \; b_2 \neq 0
\end{aligned}$$

so liefern die Gleichungen zwei Geraden durch den Ursprung. Die triviale Lösung entspricht dann ihrem Schnittpunkt im Ursprung.

Gleichungssystem mit genau einer Lösung



Gleichungssystem mit unendlich vielen Lösungen



Sobald ein homogenes System mehr Unbekannte als Gleichungen hat, besitzt es nichttriviale Lösungen. Um das einzusehen, betrachten wir ein System von vier Gleichungen mit fünf Unbekannten.

Beispiel 2.8

Man löse das folgende homogene System durch Gauss-Jordan-Elimination:

$$\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 &= 0\\
-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0\\
x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 &= 0\\
x_3 + x_4 + x_5 &= 0
\end{aligned}$$

Lösung

Die erweiterte Matrix des Systems ist

$$\begin{pmatrix}
2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\
-1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0\\
1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}.$$

Transformation auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

das zugehörige Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_5 &= 0 \\ x_3 + x_5 &= 0 \\ x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Auflösen nach den führenden Variablen:

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_2 - x_5 \\ x_3 &= -x_5 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} x_1 &= -s - t \\ x_2 &= s \\ x_3 &= -t \\ x_4 &= 0 \\ x_5 &= t \end{aligned}$$

Man beachte, dass $s = t = 0$ die triviale Lösung ergibt.

Beispiel 2.8 veranschaulicht zwei wichtige Aspekte beim Lösen homogener Gleichungssysteme:

(a) Keine der elementaren Zeilenumformungen verändert die letzte Spalte der erweiterten Matrix, die nur Nullen enthält. Daher muss das System, das der auf reduzierte Zeilenstufenform gebrachten erweiterten Matrix entspricht, homogen sein.

(b) Besteht ein homogenes lineares Gleichungssystem aus m Gleichungen mit n Unbekannten, dann besteht das reduzierte System, bedingt durch allfällige Nullzeilen, höchstens aus $r \leq m$ Gleichungen. Gilt darüber hinaus $m < n$, dann gilt auch $r < n$ und es können den $n - r$ freien Variablen beliebige Werte zugewiesen werden.

Daraus ergibt sich der folgende Satz:

Satz 2.4.1. *Ein homogenes lineares Gleichungssystem, das mehr Unbekannte als Gleichungen enthält, hat unendlich viele Lösungen.*

Bemerkung

Man beachte, dass sich Satz 1.2.1 nur auf homogene Systeme bezieht. Ein nichthomogenes System mit mehr Unbekannten als Gleichungen kann inkonsistent sein. Wir werden allerdings später zeigen, dass ein derartiges inhomogenes System unendlich viele Lösungen hat, sofern es konsistent ist.

2.5 Lösen linearer Systeme mit Computern

Viele Anwendungen führen zu sehr grossen linearen Systemen, die mit Computern gelöst werden müssen. Die dazu verwendeten Algorithmen basieren meistens auf Gauss- oder Gauss-Jordan-Elimination, deren Struktur leicht modifiziert wird, um folgenden Aspekten Rechnung zu tragen:

- Vermeiden von Rundungsfehlern,
- Reduzieren des benötigten Speicherplatzes,
- Erhöhung der Rechengeschwindigkeit.

Es kann nützlich sein, sich mit Abänderungen der Eliminationsverfahren zu beschäftigen. So liefern unsere Rechnungen viele Brüche, die sich in manchem Fall durch geeignete Abwandlungen der Zeilenumformungen vermeiden lassen.

3 Matrizen und Matrixoperationen

Rechteckige Anordnungen reeller Zahlen tauchen – ausser als erweiterte Matrizen linearer Gleichungssysteme – in vielen Zusammenhängen auf. Wir werden sie hier als selbständige Objekte behandeln und einige Eigenschaften zusammenstellen, die uns später von Nutzen sein werden.

3.1 Matrizen – Schreibweisen und Begriffe

Definition 3.1. *Eine Matrix ist ein rechteckiges Zahlenschema. Die Zahlen werden als Elemente der Matrix bezeichnet.*

Die folgenden Schemata sind Matrizen.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$
- $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
- $C = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \pi & \mathrm{e} \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $E = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$

Das *Format* (oder die *Ordnung*) einer Matrix wird durch die Anzahl ihrer Zeilen (horizontale Reihen) und Spalten (vertikale Reihen) festgelegt. Die Matrix A in Beispiel 1 hat drei Zeilen und zwei Spalten. Man sagt auch, die Matrix A ist eine 3×2-Matrix. Die erste Zahl gibt stets die Anzahl der Zeilen, die zweite die Anzahl der Spalten an.

Aufgabe 3.1

Welche Ordnung haben die obigen Matrizen?

- Matrix B: 1×4
- Matrix C: 3×3
- Matrix D: 2×1
- Matrix E: 1×1

Besteht eine Matrix aus einer einzigen Spalte, so heisst sie *Spaltenmatrix* oder *Spaltenvektor*; analog wird eine Matrix mit nur einer Zeile als *Zeilenmatrix* oder *Zeilenvektor* bezeichnet.

Wir bezeichnen Matrizen mit Grossbuchstaben und numerische Grössen mit Kleinbuchstaben; beispielsweise schreiben wir

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Im Zusammenhang mit Matrizen bezeichnet man Zahlen meistens als *Skalare*. Als Skalare verwenden wir hauptsächlich *reelle Zahlen*, obwohl auch komplexe Zahlen möglich sind.

Ist A eine Matrix, so bezeichnet a_{ij} das Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte von A. Eine 3×4-Matrix wird allgemein durch

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

beschrieben.

Eine $m \times n$-Matrix schreiben wir allgemein als

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

wofür wir auch die Schreibweisen

$$(a_{ij})_{m \times n} \quad \text{oder} \quad (a_{ij})$$

benutzen, je nachdem, ob die Grösse der Matrix gerade von Interesse ist. Üblicherweise benutzen wir den gleichen Buchstaben für eine Matrix und ihre Elemente. So bezeichnet b_{ij} das Element in Zeile i und Spalte j einer Matrix B, c_{ij} das entsprechende Element einer Matrix C.

Zuweilen schreiben wir das Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte von A als $(A)_{ij}$, also

$$(A)_{ij} = a_{ij}$$

Aufgabe 3.2

Um welche Elemente der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ handelt es sich?

(a) $a_{22} = -1$ (b) $a_{13} = 0$ (c) $a_{32} =$ nicht definiert

Eine Matrix A mit n Zeilen und n Spalten heisst *quadratische Matrix der Ordnung* n, die Elemente $a_{11}, a_{22}, \dots$ bilden die *Hauptdiagonale* von A.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

3.2 Matrixoperationen

Bisher haben wir Matrizen nur verwendet, um das Lösen linearer Gleichungssysteme abzukürzen. Für andere Anwendungen ist es sinnvoll, über eine „Matrixarithmetik“ zu verfügen, welche die Addition, Subtraktion und Multiplikation von Matrizen beschreibt. Diese Operationen werden wir im folgenden entwickeln.

Definition 3.2. *Zwei Matrizen sind gleich, wenn sie dieselbe Grösse haben und in den entsprechenden Elementen übereinstimmen.*

Mit der oben eingeführten Schreibweise bedeutet das: Haben die Matrizen A und B die gleiche Ordnung und gilt $a_{ij} = b_{ij}$ für alle Indizes i und j, so sind A und B gleich.

Aufgabe 3.3

Welche der folgenden Matrizen sind gleich?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Natürlich nur die Matrizen A und D.

Definition 3.3. *Sind A und B zwei Matrizen gleichen Formats, so ist ihre Summe $A+B$ diejenige Matrix, die durch Addition der einander entsprechenden Elemente entsteht; die Differenz $A-B$ enthält man durch Subtraktion der Elemente in B von den entsprechenden Elementen in A. Matrizen unterschiedlichen Formats können weder addiert noch subtrahiert werden.*

Damit ergibt sich für die $m \times n$-Matrizen A und B

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{und} \quad (A-B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Für alle Indizes i und j.

Aufgabe 3.4

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechne:

(a) $A + B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $A - B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $B + C$ nicht definiert

Definition 3.4. *Ist A eine Matrix und c ein Skalar, so ist das Produkt cA die Matrix, die durch Multiplikation jedes Elements von A mit der Zahl c entsteht.*

Für $A = (a_{ij})$ ist also

$$(c\,A)_{ij} = c\,a_{ij} \quad \text{für alle Indizes } i \text{ und } j$$

Aufgabe 3.5

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad C = (5) \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) $2A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $(-1)B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

(c) $7C = (35)$

(d) $99D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Allgemein schreibt man $-B$ für das Produkt $(-1)B$.

Für Matrizen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ derselben Grösse und Skalare $c_1, c_2, \ldots, c_n$ heisst der Ausdruck

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_nA_n$$

Linearkombination von $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mit den *Koeffizienten* $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Aufgabe 3.6

Berechne aus den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die Linearkombination $2A + 3B$.

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir haben bisher nur die Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar definiert, aber nicht die Multiplikation zweier Matrizen. Da Matrizen addiert und subtrahiert werden, indem man die einander entsprechenden Elemente addiert und subtrahiert, ist es naheliegend, zwei Matrizen zu multiplizieren, indem man einfach die einander entsprechenden Elemente multipliziert. Es stellte sich jedoch heraus, dass diese Definition für die meisten Probleme nicht geeignet ist. Empirisch kamen die Mathematiker zu der folgenden Definition, die zwar weniger natürlich erscheint, aber sehr nützlich ist.

Definition 3.5. *Ist A eine $m \times r$-Matrix und B eine $r \times n$-Matrix, so ist das Produkt AB die folgendermassen definierte $m \times n$-Matrix: Um das Element in Zeile i und Spalte j von AB zu bestimmen, multipliziert man paarweise die Elemente der i-ten Zeile von A und der j-ten Spalte von B und addiert die entstehenden Produkte.*

Beispiel 3.2

Man betrachte die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

A ist eine 2×3-Matrix, B eine 3×4-Matrix, also ist das Produkt AB eine 2×4-Matrix. Um beispielsweise das Element in Zeile 2 und Spalte 3 zu berechnen, betrachten wir die zweite Zeile von A und die dritte Spalte von B. Dann multiplizieren wir die einander entsprechenden Elemente und addieren diese Produkte.

Folgende schematische Darstellung soll das veranschaulichen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \boxed{2} & \boxed{6} & \boxed{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & \boxed{4} & 3 \\ 0 & -1 & \boxed{3} & 1 \\ 2 & 7 & \boxed{5} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \boxed{26} & \cdots \end{pmatrix}$$

wobei $(AB)_{23} = 2 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 0 \cdot 5 = 26$.

Das Element in der ersten Zeile und vierten Spalte des Produktes wird folgendermassen berechnet.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{4} \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & \boxed{3} \\ 0 & -1 & 3 & \boxed{1} \\ 2 & 7 & 5 & \boxed{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \boxed{13} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

wobei $(AB)_{14} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 13$

Die restlichen Elemente ergeben sich durch die Rechnungen

$$\begin{aligned} (AB)_{11} &= 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 12 \\ (AB)_{12} &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 7 = 27 \\ (AB)_{13} &= 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 30 \\ (AB)_{21} &= 2 \cdot 4 + 6 \cdot 0 + 0 \cdot 2 = 8 \\ (AB)_{22} &= 2 \cdot 1 + 6 \cdot (-1) + 0 \cdot 7 = -4 \\ (AB)_{24} &= 2 \cdot 3 + 6 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 12 \end{aligned}$$

Nach Definition der Matrixmultiplikation kann das Produkt AB nur dann gebildet werden, wenn die Anzahl der Spalten des ersten Faktors A mit der Zahl der Zeilen des zweiten Faktors B übereinstimmt; andernfalls ist das Produkt nicht definiert.

Ein bequemer Weg, festzustellen, ob ein Matrixprodukt definiert ist, besteht darin, die Grössen der beiden Faktoren nebeneinander zu schreiben. Wenn die inneren Zahlen übereinstimmen, ist das Produkt definiert. Die äusseren Zahlen geben die Grösse des Produktes an.

$$\underset{m\times r}{A} \cdot \underset{r\times n}{B} = \underset{m\times n}{AB}$$

Aufgabe 3.7

- A ist eine 3×4-Matrix.
- B ist eine 4×7-Matrix.
- C ist eine 7×3-Matrix.

Bestimme die Ordnung der Produkte, sofern sie definiert sind.

(a) AB 3×7-Matrix

(b) AC nicht definiert

(c) BA nicht definiert

(d) BC 4×3-Matrix

(e) CA 7×4-Matrix

(f) CB nicht definiert

Ist $A = (a_{ij})$ eine $m \times r$-Matrix und $B = (b_{ij})$ eine $r \times n$-Matrix, so berechnet man das Element $(AB)_{ij}$, ihres Produkts nach der Formel

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ir}b_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj} \tag{2}$$

Man beachte den hervorgehobenen Bereich in der folgenden Abbildung.

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1}} & \boxed{a_{i2}} & \dots & \boxed{a_{ir}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & \boxed{b_{1j}} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & \boxed{b_{2j}} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & \boxed{b_{rj}} & \dots & b_{rn} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.8 (a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.8 (b)

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.8 (c)

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.8 (d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.8 (e)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.8 (f)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{18} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2\right]^9 \overset{\text{(e)}}{=} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.3 Partitionierte Matrizen

Durch Einfügen horizontaler und vertikaler Trennungslinien kann eine Matrix in kleinere Matrizen zerlegt oder *partitioniert* werden. Zur Veranschaulichung haben wir drei Partitionen einer 3×4-Matrix dargestellt – in die vier Untermatrizen A_{11}, A_{12}, A_{21} und A_{22}, in ihre Zeilenmatrizen B_1, B_2 und B_3 sowie in ihre Spaltenmatrizen C_1, C_2, C_3 und C_4.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{pmatrix}$$

3.4 Matrixform eines linearen Systems

Um den Zusammenhang zwischen der Matrixmultiplikation und der Behandlung linearer Gleichungssysteme herzustellen, betrachten wir ein beliebiges System von m linearen Gleichungen mit n Unbekannten.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Da zwei Matrizen genau dann gleich sind, wenn ihre einander entsprechenden Elemente übereinstimmen, können wir die m Gleichungen des Systems durch eine einzige Matrixgleichung ersetzen.

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Die $m \times 1$-Matrix auf der linken Seite kann auch als Produkt geschrieben werden. Man erhält

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Wir bezeichnen diese Matrizen mit A, X und B und ersetzen das gegebene System von m Gleichungen mit n Unbekannten durch eine einzige Matrixgleichung

$$AX = B.$$

Die Matrix A in der obigen Gleichung heisst *Koeffizientenmatrix* des Systems.

Aufgabe 3.9

Stelle das folgende Gleichungssystem in der Matrizenform dar und gib alle daran beteiligten Matrizen an.

$$\begin{aligned} 5w + 2x - 3y + z &= 9 \\ -w + 3x - 7z &= -2 \\ 4w - 6x + 5y &= 8 \end{aligned}$$

$AX = B$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 7 \\ 4 & -6 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

3.5 Transponierte Matrix

Wir beschliessen den Abschnitt mit der Definition von zwei Matrixoperationen, die keine Analogien zur Arithmetik reeller Zahlen erlauben.

Definition 3.6. *Ist A eine $m \times n$-Matrix, so ergibt sich ihre Transponierte A^T durch Vertauschen der Zeilen mit den Spalten von A als die $n \times m$-Matrix, deren i-te Spalte für alle $i = 1, 2, \ldots, n$ die i-te Zeile von A ist.*

Beispiel 3.3

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Man beachte, dass nicht nur die Spalten von A^T die Zeilen von A sind, sondern auch die Zeilen von A^T gerade die Spalten von A sind. Das Element der i-ten Zeile und j-ten Spalte von A^T findet sich in der j-ten Zeile und i-ten Spalte von A:

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$$

Die Transponierte einer quadratischen Matrix A erhält man durch Vertauschen („Spiegeln“) der Elemente, die symmetrisch zur Hauptdiagonalen liegen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 7 & 0 \\ -5 & 8 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.10

Berechne für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ die folgenden Ausdrücke:

$$(A+B)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 13 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(BA)^{\mathrm{T}} = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \right]^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -2 & 13 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

Verallgemeinerung?

- $(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$

- $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$

3.6 Die Spur einer quadratischen Matrix

Definition 3.7. *Ist A eine quadratische Matrix, so erhält man die Spur* $\mathrm{sp}(A)$ *als Summe der Hauptdiagonalelemente von A. Die Spur einer nichtquadratischen Matrix ist nicht definiert.*

Beispiel 3.4

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -8 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{sp}(A) = -1 + 5 + 7 + 0 = 11.$

Aufgabe 3.11

Bestimme die Spur der Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

$\mathrm{sp}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

4 Equilibrium-seeking systems

Consider the following situation: In a population study, a certain proportion of city dwellers move into the country every year and a certain proportion of country dwellers decide to become city dwellers. A similar situation occurs in national employment where a certain percentage of unemployed people find jobs and a certain percentage of employed people become unemployed. Mathematically, these situations are essentially the same. The problem that poses itself is how to describe this situation in a concrete mathematical way, and in so doing determine whether such a system reaches a „steady state". Our objective now is to show how matrices can be used to solve this problem.

To be more specific, let us suppose that 75% of the unemployed at the beginning of a year find jobs during the year, and that 5% of people with jobs become unemployed during the year. These proportions are somewhat optimistic, and might lead one to conjecture that „sooner or later" everyone will have a job. But these figures are chosen to illustrate the point we wish to make, namely that the system „settles down" to fixed proportions.

The situation can be described compactly by the following matrix and its obvious interpretation:

	unemployed	employed
into unemployment	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$
into employment	$\frac{3}{4}$	$\frac{19}{20}$

Suppose now that the fraction of the population that is originally unemployed is U_0 and that the fraction of the population that is originally employed is $E_0 = 1 - U_0$. We represent this state of affairs by the matrix

$$\begin{pmatrix} U_0 \\ E_0 \end{pmatrix}$$

In a more general way, we let the matrix

$$\begin{pmatrix} U_i \\ E_i \end{pmatrix}$$

signify the proportions of the unemployed/employed population at the end of the i-th year.

At the end of the first year we have

$$U_1 = \frac{1}{4}\,U_0 + \frac{1}{20}\,E_0$$

$$E_1 = \frac{3}{4}\,U_0 + \frac{19}{20}\,E_0$$

and we can express these equations in the matrix form

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ E_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{20} \\ \frac{3}{4} & \frac{19}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ E_0 \end{pmatrix}$$

which involves the 2×2 matrix introduced above.

Similarly, at the end of the second year we have

$$U_2 = \frac{1}{4} U_1 + \frac{1}{20} E_1$$

$$E_2 = \frac{3}{4} U_1 + \frac{19}{20} E_1$$

and consequently

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{20} \\ \frac{3}{4} & \frac{19}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ E_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{20} \\ \frac{3}{4} & \frac{19}{20} \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} U_0 \\ E_0 \end{pmatrix}$$

Using induction, we can thus say that at the end of the k-th year the relationship between U_k, E_k and U_0, E_0 is given by

$$\begin{pmatrix} U_k \\ E_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{20} \\ \frac{3}{4} & \frac{19}{20} \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} U_0 \\ E_0 \end{pmatrix}.$$

Now it can be shown that, for all positive integers k,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{20} \\ \frac{3}{4} & \frac{19}{20} \end{pmatrix}^k = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 + \frac{15}{5^k} & 1 - \frac{1}{5^k} \\ 15 - \frac{15}{5^k} & 15 + \frac{1}{5^k} \end{pmatrix}.$$

This is rather like pulling a rabbit out of a hat, for we are far from having the machinery at our disposal to obtain this result; but the reader will at least be able to verify this statement by induction. From this formula we see that, the larger k becomes, the closer is the approximation

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{20} \\ \frac{3}{4} & \frac{19}{20} \end{pmatrix}^k \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{15}{16} & \frac{15}{16} \end{pmatrix}.$$

Since $U_0 + E_0 = 1$ we thus have

$$\begin{pmatrix} U_k \\ E_k \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{15}{16} & \frac{15}{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ E_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} U_0 + \frac{1}{16} E_0 \\ \frac{15}{16} U_0 + \frac{15}{16} E_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{15}{16} \end{pmatrix}$$

Put another way, irrespective of the initial values of U_0 and E_0, we see that the system is „equilibrium-seeking“ in the sense that „eventually“ one sixteenth of the population remains unemployed. Of course, the lack of any notion of a limit for a sequence of matrices precludes any rigorous description of what is meant mathematically by an „equilibrium-seeking“ system. However, only the reader's intuition is called on to appreciate this particular application.

5 Regeln der Matrixarithmetik

In diesem Abschnitt werden einige Eigenschaften der arithmetischen Matrixoperationen behandelt. Wir werden sehen, dass viele der bekannten Rechenregeln für reelle Zahlen auch für Matrizen gelten, einige jedoch ausgenommen werden müssen.

5.1 Eigenschaften der Matrixoperationen

- Kommutativgesetz der Addition: $A + B = B + A$
- Assoziativgesetz der Addition: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- Assoziativgesetz der Multiplikation: $A(BC) = (AB)C$
- linkes Distributivgesetz: $A(B + C) = AB + AC$
- rechtes Distributivgesetz: $(A + B)C = AC + BC$

Bemerkung

Das Kommutativgesetz gilt nicht für Matrizen.

Ist A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times p$-Matrix, so ist das Produkt AB definiert.

Umgekehrt existiert BA nur, wenn $n = p = m$ gilt.

Dann lassen sich für $n \geq 2$ Beispiele mit $AB \neq BA$ finden.

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 26 & 31 \end{pmatrix}$

aber:

$BA = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 19 \\ 14 & 27 \end{pmatrix}$

5.2 Nullmatrizen

Eine Matrix, deren Elemente alle null sind, heisst *Nullmatrix*. Sie wird mit 0 bezeichnet. Eine Verwechslung mit der Zahl 0 kann meist aus dem Zusammenhang ausgeschlossen werden.

Beispiele

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ist A eine beliebige Matrix und 0 die Nullmatrix desselben Formats, so gilt

$$A + 0 = 0 + A = A$$

Wie in der skalaren Gleichung $a + 0 = 0 + a = a$ wird die Nullmatrix *neutrales Element der Matrixaddition* genannt.

Rechenregeln für die Nullmatrix

Die Matrixformate sind jeweils so gewählt, dass alle Operationen definiert sind.

(a) $A + 0 = 0 + A = A$

(b) $A - A = 0$

(c) $0 - A = -A$

(d) $0 \cdot A = 0$ und $A \cdot 0 = 0$

Jedoch lassen sich nicht alle Eigenschaften der reellen Zahl 0 auf die Nullmatrizen übertragen. In der folgenden Aufgabe untersuchen wir zwei dieser Eigenschaften.

Die Kürzungsregel

Für a, b, $c \in \mathbb{R}$ gilt: $ab = ac$ und $a \neq 0 \Rightarrow b = c$

Für geschickt gewählten Matrizen A, B, $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 27 \\ 14 & 18 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 27 \\ 14 & 18 \end{pmatrix}$$

Also ist $AB = AC$ und $A \neq 0$ aber $B \neq C$!

Nullteilerfreiheit

Die Menge der reellen Zahlen ist *nullteilerfrei*:

Sind a, $b \in \mathbb{R}$ mit $ab = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$ oder $b = 0$

Für die Matrizen A, $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $AB = 0$ aber $A \neq 0$ und $B \neq 0$!

Matrizen $A \neq 0$ und $B \neq 0$ mit $AB = 0$ heissen *Nullteiler*.

5.3 Einheitsmatrizen

Quadratische Matrizen mit Einsen in der Hauptdiagonalen und Nullen ausserhalb heissen *Einheitsmatrizen*. Sie werden mit I bezeichnet. Spielt das Format eine Rolle, so schreiben wir I_n für die $n \times n$-Einheitsmatrix.

Beispiele

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eine Eigenschaft der Einheitsmatrix haben wir bereits früher kennen gelernt. Ist A eine $m \times n$-Matrix, so gilt

$$AI_n = A \quad \text{und} \quad I_m A = A$$

Folglich übernimmt die Einheitsmatrix in der Matrixarithmetik die Rolle der Zahl 1 in der skalaren Gleichung $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

5.4 Die Inverse einer Matrix

Sei A eine quadratische Matrix. Gibt es eine Matrix B mit

$$AB = BA = I,$$

so heisst A *invertierbar*. B wird als *Inverse* von A bezeichnet.

Aufgabe 5.1

Zeige, dass $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ eine Inverse von $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ist.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Die Matrix A ist nicht invertierbar.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Dazu betrachten wir eine beliebige 3×3-Matrix

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Damit berechnen wir so weit wie nötig das Produkt:

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & 0 \\ \dots & 0 \\ \dots & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daher kann $A \cdot B$ nicht mit der Einheitsmatrix I_3 übereinstimmen.

5.5 Eigenschaften der Inversen

Nachdem wir gesehen haben, dass sich längst nicht alle Rechenregeln der reellen Zahlen auf Matrizen übertragen lassen, können wir uns fragen, ob es zu einer Matrix A mehrere Inverse geben kann. Dies ist jedoch nicht der Fall.

Satz 5.1

Existiert zu einer (quadratischen) Matrix A eine Inverse, so ist diese eindeutig bestimmt.

Beweis

Annahme: Seien B und C Inverse der Matrix A mit $B \neq C$.

$$\begin{aligned} BA &= I && \| \cdot C \quad \text{von links} \\ (BA)C &= IC && \text{Assoziativgesetz} \\ B(AC) &= C && C \text{ ist Inverse von } A \\ BI &= C \\ B &= C \end{aligned}$$

Also gilt $B = C$ und die Annahme ist falsch.

$\square$

Als Folge des letzten Satzes können wir jetzt von *der* Inversen einer Matrix A reden, die wir mit A^{-1} bezeichnen.

Damit entspricht die Inverse von A dem Kehrwert a^{-1} einer reellen Zahl $a \neq 0$.

Im nächsten Abschnitt werden wir eine Methode zur Inversenberechnung kennen lernen. Hier begnügen wir uns damit, 2×2-Matrizen zu betrachten.

Satz 5.2

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist für $ad - bc \neq 0$ invertierbar. In diesem Fall gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Beweis:

Nachrechnen:

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -cb + ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Satz 5.3

Für invertierbare Matrizen A und B gleicher Grösse gilt:

(a) AB ist invertierbar.

(b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Beweis

Zeige, dass $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ aus (b) die gesuchte Inverse für (a) ist:

$$\begin{aligned} (AB)(AB)^{-1} &= (AB)(B^{-1}A^{-1}) \quad \text{Assoziativgesetz} \\ &= A(BB^{-1})A^{-1} \\ &= AIA^{-1} = AA^{-1} = I \end{aligned}$$

und umgekehrt:

$$\begin{aligned} (AB)^{-1}(AB) &= (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B \\ &= B^{-1}IB = BB^{-1} = I \end{aligned}$$

□

5.6 Potenzen einer Matrix

Für eine quadratische Matrix A definieren wir die nichtnegativen ganzzahligen Potenzen:

- $A^0 = I$
- $A^n = \underbrace{AA \ldots A}_{n \text{ Faktoren}}$

Ist A ausserdem invertierbar, so definieren wir ihre negativen ganzen Potenzen

- $A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \ldots A^{-1}}_{n \text{ Faktoren}}$

Das folgende Konzept ist mit den Potenzen der reellen Zahl -1 verwandt:

Eine Matrix für die $A^{k+1} = A$ gilt, wobei k eine positive ganze Zahl ist, heisst *periodisch*. Die kleinste positive ganze Zahl, für die $A^{k+1} = A$ gilt heisst *Periode* von A.

Für den Spezialfall $k = 1$; also $A^2 = A$ wird die Matrix A *idempotent* genannt. (*idem*: derselbe)

Eine Matrix A, für die $A^p = 0$ gilt, heisst *nilpotent*. Wenn p die kleinste positive ganze Zahl ist, für die $A^p = 0$ ist, dann heisst A nilpotent vom *Index* p (oder *Grad* p). (*nihil*: nichts)

Aufgabe 5.2

Bestimme die Periode k der periodischen Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A \cdot A^4 = A \cdot I = A \quad \Rightarrow \quad k = 4$$

Aufgabe 5.3

Zeige, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ nilpotent ist und bestimme ihren Index. Verwende den Taschenrechner.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Index} = 3$$

5.7 Matrixpolynome

Für eine $m \times m$-Matrix A und ein Polynom

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

definieren wir

$$p(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I$$

wobei I die $m \times m$ Einheitsmatrix ist.

Aufgabe 5.4

Gegeben sind das Polynom $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$ und die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechne $p(A)$.

$$p(A) = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$$

5.8 Eigenschaften der Transponierten

Zur Erinnerung: Ist A eine quadratische Matrix, so ist ihre Transponierte A^T die Matrix $(A^T)_{ij} = A_{ji}$.

Der folgende Satz fasst die wichtigsten Eigenschaften der Transponierten einer Matrix zusammen.

Satz 5.4

Sind die Matrixformate jeweils passend gewählt und ist die Matrix A in (e) invertierbar, so gilt:

(a) $(A^T)^T = A$

(b) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(c) $(kA)^T = kA^T$

(d) $(AB)^T = B^T A^T$

(e) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Beweis von (d)

Ist $A \in \mathbb{R}^{m \times r}$ und $B \in \mathbb{R}^{r \times n}$ so sind $(AB)^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $B^T A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ definiert und es gilt:

$$\begin{aligned}\big((AB)^T\big)_{ij} &= (AB)_{ji} \\ &= A_{j1}B_{1i} + A_{j2}B_{2i} + \ldots + A_{jr}B_{ri} \\ &= B_{1i}A_{j1} + B_{2i}A_{j2} + \ldots + B_{ri}A_{jr} \\ &= B^T_{i1}A^T_{1j} + B^T_{i2}A^T_{2j} + \ldots + B^T_{ir}A^T_{rj} \\ &= (B^T A^T)_{ij}\end{aligned}$$

Beweis von (e)

$$A^T(A^{-1})^T \overset{\text{(d)}}{=} (A^{-1}A)^T = I^T = I$$

und

$$(A^{-1})^T A^T \overset{\text{(d)}}{=} (AA^{-1})^T = I^T = I$$

Aufgabe 5.5

Berechne zu $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ die Matrizen $\big(A^{-1}\big)^T$ und $\big(A^T\big)^{-1}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 2 - 1 \cdot 5}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\big(A^{-1}\big)^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\big(A^T\big)^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 2 - 5 \cdot 1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

6 Elementarmatrizen und Inversenberechnung

Wir stellen ein Verfahren zur Berechnung der Inversen einer Matrix vor. Ausserdem werden grundlegende Eigenschaften invertierbarer Matrizen behandelt.

6.1 Elementarmatrizen

Definition

Eine $n \times n$-Matrix heisst *Elementarmatrix*, wenn sie durch eine einzige elementare Zeilenoperation aus der Einheitsmatrix I_n hervorgeht.

Beispiel 6.1

Multiplikation der dritte Zeile von I_3 mit 5:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Beispiel 6.2

Vertauschen der ersten und zweiten Zeile von I_3:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 6.3

Addition des Zweifachen von Zeile 1 zur Zeile 3 in I_3.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wird eine Matrix A mit einer Elementarmatrix E multipliziert, so entspricht das einer elementaren Zeilenoperation für A. Das ist auch der Inhalt des folgenden Satzes:

Satz 6.1

Die Elementarmatrix E sei aus der Einheitsmatrix I_m durch eine elementare Zeilenoperation hervorgegangen. Ist nun A irgendeine $m \times n$-Matrix, so ist das Produkt EA gerade die Matrix, die durch Anwenden derselben Zeilenoperation auf A entsteht.

(ohne Beweis)

Beispiel 6.4

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}}_{E}\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}}_{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\35&40&45\end{pmatrix}$$

Wirkung von E:

Multiplikation der dritten Zeile von A mit 5.

Beispiel 6.5

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{E}\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}}_{A}=\begin{pmatrix}4&5&6\\1&2&3\\7&8&9\end{pmatrix}$$

Wirkung von E:

Vertauschung der Zeilen 1 und 2 von A.

Beispiel 6.6

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}}_{E}\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}}_{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\9&12&15\end{pmatrix}$$

Wirkung von E:

Die Addition des Doppelten von Zeile 1 zur Zeile 3.

Bemerkung

Satz 6.1 eignet sich vor allem für theoretische Betrachtungen, also für die Entwicklung von Aussagen über Matrizen und lineare Gleichungssysteme. Für praktische Berechnungen ist es sinnvoller, Zeilenoperationen durchzuführen, anstatt mit Elementarmatrizen zu multiplizieren.

Zu jeder elementaren Zeilenoperation, die aus einer Einheitsmatrix I eine Elementarmatrix E erzeugt, gibt es eine *inverse Zeilenoperation*, die E wieder in I zurückverwandelt.

Übersicht

Zeilenoperation: Multiplikation der i-ten Zeile mit $c \neq 0$.

Inverse: Multiplikation der i-ten Zeile mit $\frac{1}{c}$.

Zeilenoperation: Vertauschen der i-ten und j-ten Zeile

Inverse: Vertauschen der i-ten und j-ten Zeile.

Zeilenoperation: Addition des c-fachen der i-ten zur j-ten Zeile.

Inverse: Addition des $(-c)$-fachen der i-ten zur j-ten Zeile

Satz 6.2

Jede Elementarmatrix ist invertierbar. Ihre Inverse ist wieder eine Elementarmatrix.

Beispiel 6.7

Die Inverse der Elementarmatrix $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ ist:

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

denn

$$EE^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 6.8

Die Inverse der Elementarmatrix $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist:

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

denn

$$EE^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 6.9

Die Inverse der Elementarmatrix $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist:

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

denn

$$EE^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Im folgenden Satz werden wichtige Zusammenhänge zwischen Invertierbarkeit, homogenen linearen Gleichungssystemen, reduzierten Zeilenstufenformen und Elementarmatrizen behandelt, die wir noch häufig verwenden werden.

Satz 6.3

Für eine $n \times n$-Matrix A sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) A ist invertierbar.

(b) Ist X eine Spaltenmatrix, so hat $AX = 0$ nur die triviale Lösung.

(c) Die reduzierte Zeilenstufenform von A ist I_n.

(d) A lässt sich als Produkt von Elementarmatrizen schreiben.

6.2 Zeilenäquivalenz

Geht die Matrix B durch endlich viele Zeilenoperationen aus A hervor, so erhalten wir offenbar wieder die Matrix A, wenn wir B den inversen Operationen in umgekehrter Reihenfolge unterwerfen. Matrizen, die sich durch eine Folge elementarer Zeilenoperationen ineinander umwandeln lassen, heissen *zeilenäquivalent*.

6.3 Ein Verfahren zur Matrixinversion

Als Anwendung von Satz 6.3 entwickeln wir eine Methode zur Bestimmung der Inversen einer invertierbaren Matrix.

Ist A eine invertierbare $n \times n$-Matrix, so gibt es Elementarmatrizen $E_1, E_2, \ldots, E_k$, mit deren Hilfe man A zu einer Einheitsmatrix umformen kann.

$$E_k \ldots E_2 E_1 A = I_n$$

Da Elementarmatrizen invertierbar sind, gilt

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_k^{-1} I_n = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_k^{-1}$$

Da sowohl A als auch die Elementarmatrizen invertierbar sind, gilt

$$A^{-1} = (E_1^{-1}E_2^{-1}\dots E_k^{-1})^{-1} = E_k \dots E_2 E_1 = E_k \dots E_2 E_1 I_n$$

Merke:

Wir erhalten die Inverse einer invertierbaren Matrix A, indem wir eine Folge von elementaren Zeilenoperationen bestimmen, die A zur Einheitsmatrix umformt, und diese Folge dann auf I_n anwenden.

Beispiel 6.10

Man bestimme die Inverse von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Lösung: Wir wollen A durch Zeilenoperationen zur Einheitsmatrix umwandeln und gleichzeitig mit denselben Operationen I in A^{-1} überführen. Dazu schreiben wir die Einheitsmatrix rechts neben A und erhalten die Matrix

$$A \mid I$$

auf die wir geeignete Zeilenoperationen anwenden, bis die linke Seite die Gestalt von I hat. Gleichzeitig ergibt sich auf der rechten Seite A^{-1}, so dass wir schliesslich die Matrix

$$I \mid A^{-1}$$

erhalten.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Wir addieren das (-2)-fache der ersten Zeile zur zweiten und das (-1)-fache der ersten Zeile zur dritten.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

Wir addieren das 2-fache der zweiten Zeile zur dritten.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}$$

Wir multiplizieren die dritte Zeile mit -1.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}$$

Wir addieren das Dreifache der dritten Zeile zur zweiten und das (-3)-fache der dritten Zeile zur ersten.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}$$

Wir addieren das (-2)-fache der zweiten Zeile zur ersten.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}$$

Also ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Meist ist nicht von vornherein klar, ob eine gegebene Matrix invertierbar ist. Ist eine $n \times n$-Matrix A nicht invertierbar, so existiert keine Folge elementarer Zeilenoperationen, die A in I_n verwandeln. Anders ausgedrückt enthält die reduzierte Zeilenstufenform von A mindestens eine Nullzeile. Wenden wir also die im vorangegangenen Beispiel beschriebene Methode auf eine nicht invertierbare Matrix an, erhalten wir während der Berechnungen einen Nullzeile auf der *linken Seite*. Wir können dann schliessen, dass die gegebene Matrix nicht invertierbar ist und die Prozedur abbrechen.

Beispiel 6.11

Man betrachte

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Das Verfahren aus dem letzten Beispiel liefert hier:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Wir addieren das (-2)-fache der ersten Zeile zur zweiten und die erste Zeile zur dritten.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Wir addieren die zweite Zeile zur dritten.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$

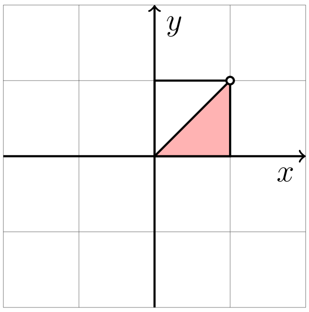
Da die linke Seite jetzt eine Nullzeile enthält, ist A nicht invertierbar.

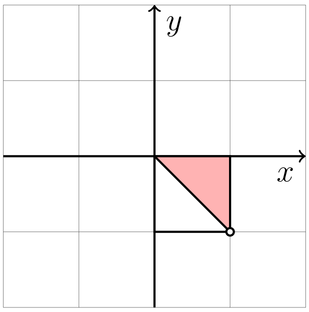
7 Die Geometrie linearer Operatoren in der Ebene

Hier geht es um eine Anwendung der Matrizenrechnung, die unter anderem in der Computergrafik Anwendung findet.

7.1 Spiegelungen

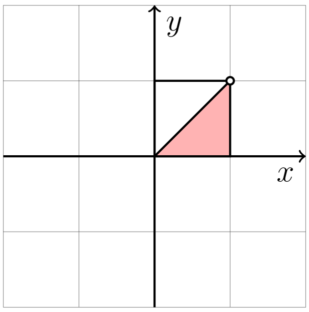
Spiegelung an der x-Achse

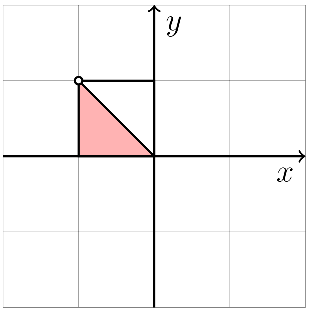




$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

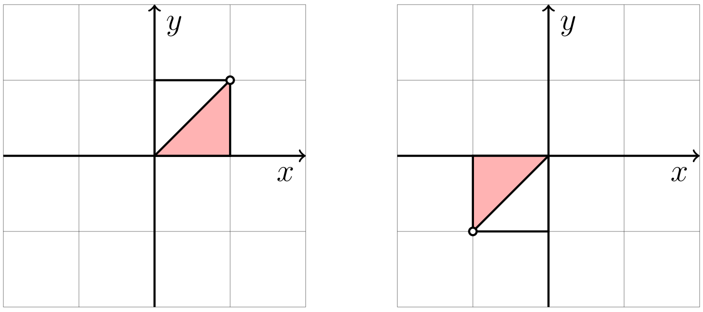
Spiegelung an der y-Achse





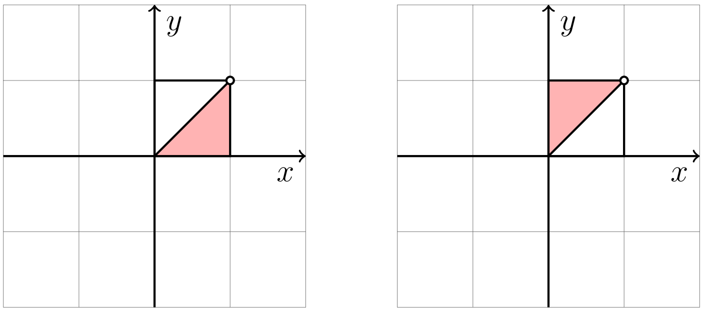
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

Spiegelung am Ursprung



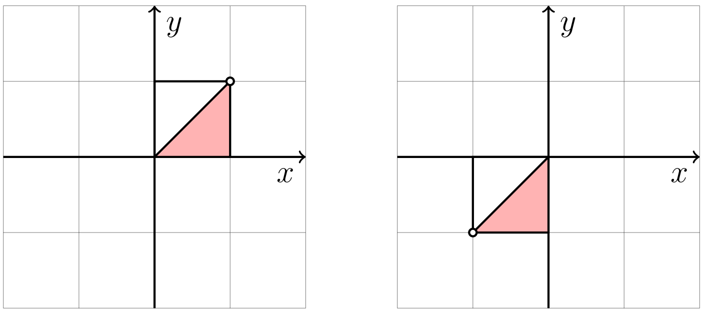
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Spiegelung an der Geraden $y = x$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

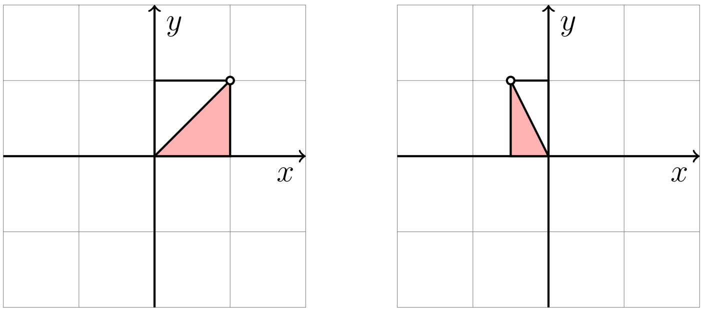
Spiegelung an der Geraden $y = -x$



$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$$

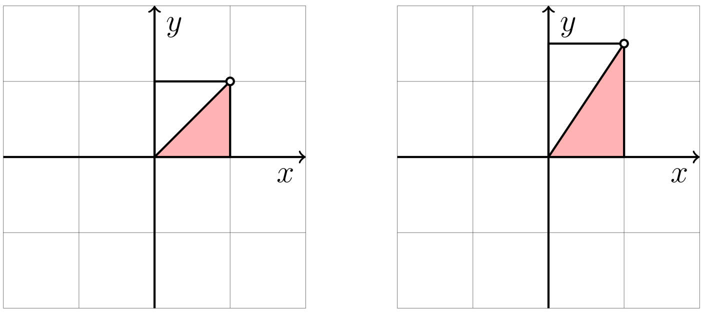
7.2 Zentrische Streckungen

Stauchung in x-Richtung mit Faktor -0.5



$$\begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5x \\ y \end{pmatrix}$$

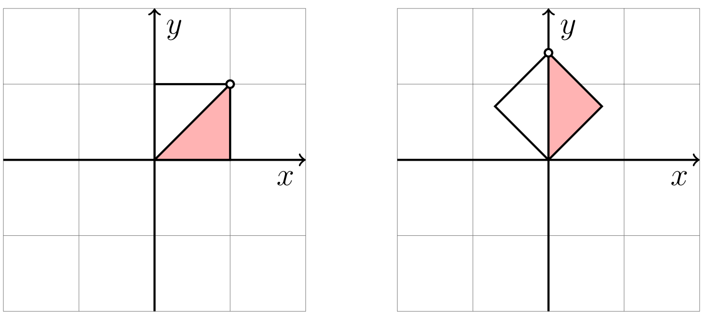
Streckung in y-Richtung mit Faktor 1.5



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1.5y \end{pmatrix}$$

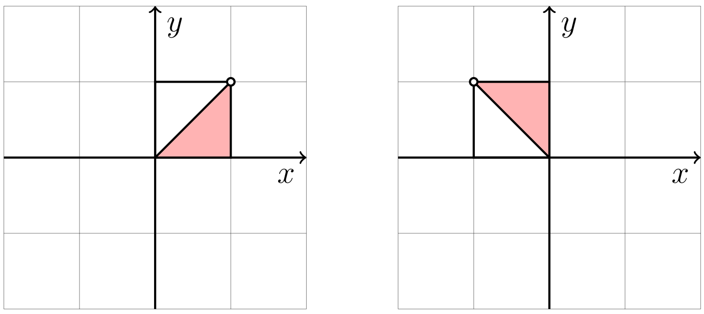
7.3 Drehungen

Drehung um den Ursprung mit $\varphi = 45°$



$$\begin{pmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$$

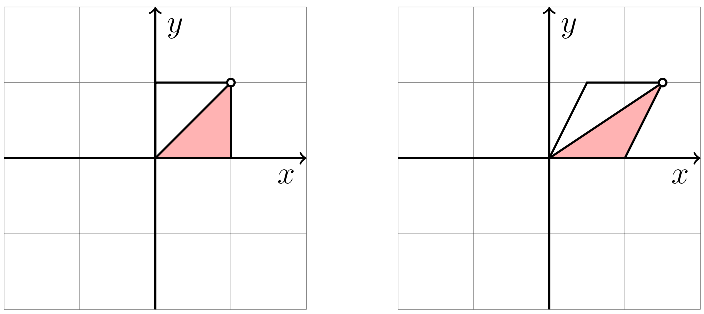
Drehung um den Ursprung mit $\varphi = 90°$



$$\begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

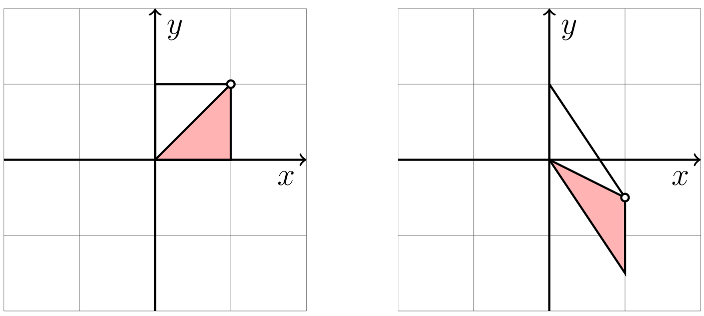
7.4 Scherungen

Scherung in x-Richtung mit Faktor 0.5



$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 0.5y \\ y \end{pmatrix}$$

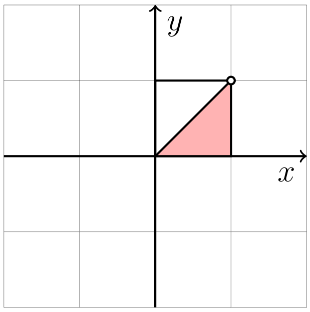
Scherung in y-Richtung mit Faktor -1.5

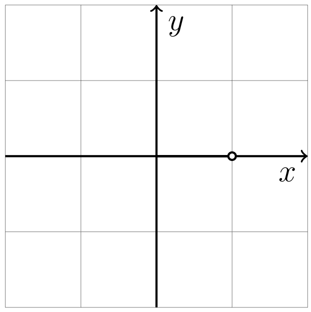


$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -1.5x + y \end{pmatrix}$$

7.5 Orthogonale Projektionen

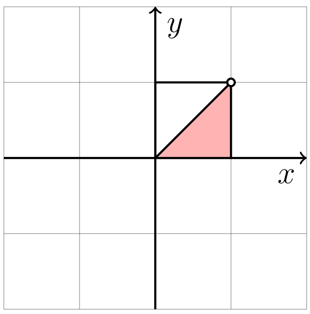
Orthogonale Projektion auf die x-Achse

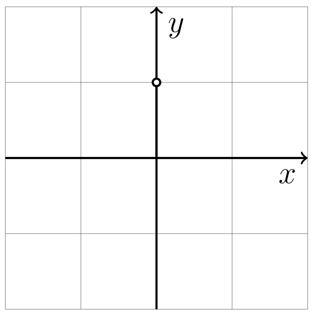




$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Orthogonale Projektion auf die y-Achse

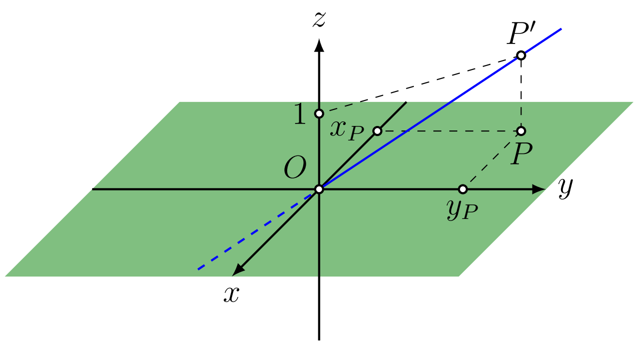




$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

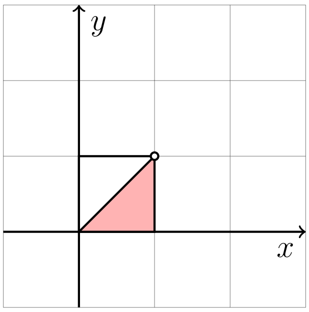
7.6 Homogene Koordinaten

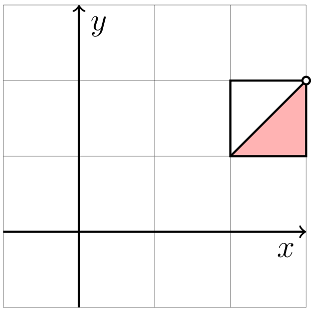
Wir identifizieren jeden Punkt $P(x_P, y_P)$ der xy-Ebene mit der Ursprungsgeraden durch den Punkt $P'(x_P, y_P, 1)$ im Raum:



7.7 Translationen

Mit Hilfe homogener Koordinaten lassen sich unter anderem auch Translationen (Parallelverschiebungen) in Matrixform darstellen:





$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ y+1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die bisherigen 2×2-Transformationsmatrizen können problemelos zu 3×3-Matrizen erweitert werden, so dass auch mit ihnen homogene Koordinatenvektoren abgebildet werden können.

Zum Beispiel eine Spiegelung am Ursprung:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 1 \end{pmatrix}$$

7.8 Die Umkehrungen der Transformationen

Um die Matrix der Umkehrtransformation einer umkehrbaren Transformation mit der Matrix A zu bestimmen, muss A^{-1} berechnet werden. In vielen Fällen lässt sich die inverse Matrix erraten.

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7.9 Verkettungen von Transformationen

Die elementearen Transformationen lassen zu komplexeren Abbildungen zusammensetzen. Um die Matrix der Gesamtabbildung zu bekommen, können die Matrizen der einzelnen Abbildungen in der entsprechenden Reihenfolge multipliziert werden.

Beispiel 7.1

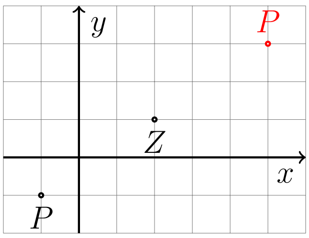
Eine Punktspiegelung an $Z(2,1)$ setzt sich aus folgenden Einzelabbildungen zusammen:

- Verschiebung um $\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$: $T_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
- Spiegelung an $(0,0)$: $T_2 = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
- Verschiebung um $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$: $T_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
T = T_3 \cdot T_2 \cdot T_1 &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\0 & -1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-1 & 0 & 4\\0 & -1 & 2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Test von T

Spiegle $P(-1,-1)$ an $Z(2,1)$:



$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 4\\0 & -1 & 2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$$

8 Determinanten

Die *Determinante* ist eine Funktion, die jeder quadratischen Matrix A eine Zahl $(\det A)$ zuordnet.

Diese Zahl enthält bestimmte Informationen über die Matrix A. Beispielsweise, ob A invertierbar ist oder nicht.

8.1 Die Eigenschaften der Determinante

Motivation

Für eine 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

gilt bekanntlich

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Die Inverse existiert genau dann, wenn $ad - bc \neq 0$.

Definition der Determinante für 2×2 Matrizen:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Anstelle von $\det A$ schreibt man häufig auch $|A|$ wobei es sich nicht um einen Betrag handelt, da die Determinante auch negative Werte annehmen kann.

Anstatt die Determinantenfunktion formal zu definieren und dann ihre Merkmale zu untersuchen, gehen wir den umgekehrten Weg:

Zuerst werden wir die drei bestimmenden Eigenschaften der Determinante nennen und dann daraus weitere Eigenschaften ableiten. Auf diese Weise erhalten wir für numerische Matrizen ein effizientes Verfahren zur Determinantenberechnung.

Eigenschaft 1

Für jede natürliche Zahl n hat die Determinante der Einheitsmatrix I_n den Wert 1.

Beispiel:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

Eigenschaft 2

Vertauscht man zwei Zeilen einer quadratischen Matrix, so wechselt die Determinante ihr Vorzeichen.

Beispiel:

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2$$

$$\det\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix} = 2\cdot 3 - 1\cdot 4 = +2$$

Eigenschaft 3

Die Determinantenfunktion ist linear in jeder Zeile, wobei die übrigen Zeilen festgehalten werden.

- $\det\begin{pmatrix}k\cdot a & k\cdot b\\ c & d\end{pmatrix} = k\cdot\det\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$
- $\det\begin{pmatrix}a+e & b+f\\ c & d\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}e & f\\ c & d\end{pmatrix}$

Diese Eigenschaft wird auch *Multilinearität* genannt.

Eigenschaft 4

Sind zwei Zeilen einer quadratischen Matrix A identisch, so gilt $\det A = 0$

Beweis: Vertauscht man die beiden identischen Zeilen, so ändert sich an der Matrix nichts. Die Eigenschaft 1 besagt aber, dass die Determinante das Vorzeichen wechselt, wenn zwei Zeilen vertauscht werden.
Also gilt $\det A = -\det A$ und damit $\det A = 0$. $\square$

Eigenschaft 5

Addiert man ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen, bleibt die Determinante unverändert.

Beweis: Aus der Multilinearität der Determinante folgt:

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}a & b\\ c+ka & d+kb\end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}a & b\\ ka & kb\end{pmatrix}\\ &= \det\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} + k\det\begin{pmatrix}a & b\\ a & b\end{pmatrix}\\ &= \det\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\end{aligned}$$

wobei beim letzten Schritt Eigenschaft 4 angewendet wurde. $\square$

Eigenschaft 6

Für eine quadratische Matrix A mit eine Nullzeile gilt $\det A = 0$.

Beweis:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 \\ b & c \end{pmatrix} = 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = 0 \qquad \square$$

Eigenschaft 7

Ist A eine Dreiecksmatrix, so ist $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ das Produkt der Diagonalelemente.

Beweis:

- Falls alle Diagonalelemente von Null verschieden sind:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} &\overset{(5)}{=} \dots \overset{(5)}{=} \det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \\ &\overset{(3)}{=} a_{11}a_{22}a_{33} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\overset{(1)}{=} a_{11}a_{22}a_{33} \end{aligned}$$

- Falls mindestens ein Diagonalelement null ist.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \overset{(5)}{=} \dots \overset{(5)}{=} \det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \overset{(6)}{=} 0$$

$\square$

Bemerkung

Die obigen Eigenschaften liefern uns ein effizientens Verfahren, um die Determinante für konkrete Matrizen zu berechnen:

Bringe die Matrix mittels elementarer Zeilenumformungen auf Dreiecksform, wobei jede Zeilenvertauschung das Vorzeichen der Determinante ändert und konstante Faktoren zeilenweise vor die Determinante gezogen werden dürfen.

Anschliessend ist das Produkt der Diagonaleinträge zu berechnen und mit dem entsprechenden Vorzeichen zu versehen

Eigenschaft 8

A ist genau dann *singulär* (nicht invertierbar) wenn $\det A = 0$.

Beweis:

$\Rightarrow$ Ist A singulär, so hat die Stufenform U von A eine Nullzeile. Aus (2) und (6) folgt $\det A = \pm \det U = 0$.

$\Leftarrow$ (indirekt) Ist A invertierbar, so lässt sich A durch elementare Zeilenumformungen auf Stufenform U bringen, in der alle Diagonalelemente von Null verschieden sind. Aus (2), (6) und (7) folgt $\det A = \pm \det U \neq 0$

$\square$

Eigenschaft 9

$\det AB = \det A \cdot \det B$

ohne Beweis

Eigenschaft 10

Ist A invertierbar, so gilt $\det A^{-1} = 1/\det A$.

Beweis:

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= I \qquad || \det \\ \det AA^{1} &= \det I \quad \text{(9) und (1)} \\ \det A \cdot \det A^{-1} &= 1 \\ \det A^{-1} &= 1/\det A \end{aligned}$$

$\square$

Eigenschaft 11

$\det A^T = \det A$

ohne Beweis

8.2 Die Kofaktorformel

Für theoretische Zwecke oder kleine Matrizen verwendet man unter anderem folgende rekursive Berechnungsvorschrift für Determinanten, auf deren Herleitung hier nicht eingegangen wird:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}|M_{ij}| \qquad \text{(Entwicklung nach der } j\text{-ten Spalte)}$$

- j ist eine fest gewählte Spaltennummer.
- die *Minore* M_{ij} ist die $(n-1)\times(n-1)$-Matrix, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte von A ensteht.
- $(-1)^{i+j}|M_{ij}|$ wird *Kofaktor* genannt.

Die Determinante einer 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Entwicklung nach der 1. Spalte:

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{i=1}^{2} a_{i1}(-1)^{i+1}|M_{i1}| \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}|a_{22}| + a_{21}(-1)^{2+1}|a_{12}| \\ &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{aligned}$$

Die Determinante einer 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{i=1}^{3} a_{ij}(-1)^{i+1}|M_{i1}| \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) \\ &\quad + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

Die Regel von Sarrus (Maschenzaun-Regel)

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \det A = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

Achtung: Dieses Rechenschema gilt nur für Determinanten von 3×3-Matrizen.

9 Determinantenberechnung durch Zeilenoperationen

Wir zeigen, dass die Determinante einer Matrix berechnet werden kann, indem man die Matrix auf Zeilenstufenform bringt. Diese Methode ist deswegen so wichtig, weil sie die langwierigen Rechnungen vermeidet, die bei direkter Anwendung der Determinantenfunktion entstehen.

9.1 Ein fundamentaler Satz

Beispiel 1

Wir wollen das folgende grundlegende Ergebnis der Determinantentheorie anhand einiger Beispiele plausibel machen.

Berechne die Determinanten

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \; \det(A) = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 0$

(b) $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & b_{13} \\ b_{21} & 0 & b_{23} \\ b_{31} & 0 & b_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & 0 \\ b_{31} & 0 \end{matrix} \; \det(B) = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 0$

(c) $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \; \det(C) = c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12}$

(d) $C^T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \; \det(C^T) = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = \det(C)$

Satz 9.1.1. *Sei A eine quadratische Matrix.*

(a) Enthält A eine Nullzeile oder Nullspalte, so ist $\det(A) = 0$.

(b) $\det(A^T) = \det(A)$.

Beweis

(a) Da jedes elementare Produkt aus A einen Faktor aus jeder Zeile und jeder Spalte enthält, sind alle diese Produkte null. Da die Determinante die Summe aller vorzeichenbehafteten elementaren Produkte ist, folgt $\det(A) = 0$.

(b) ohne Beweis.

9.2 Determinanten von Dreiecksmatrizen

Beispiel 2

Berechne die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$

Jedes andere Elementare Produkt enthält mindestens einen Faktor 0.

Satz 9.2.1. *Für eine $n \times n$-Dreiecksmatrix A gilt:*

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

9.3 Auswirkungen elementarer Zeilenumformungen auf Determinanten

Im nächsten Satz sehen wir, wie eine elementare Zeilenumformung in einer Matrix den Wert ihrer Determinante beeinflusst.

Satz 9.3.1. *Sei A eine $n \times n$-Matrix.*

(a) Ist B die Matrix, die durch Multiplikation einer Zeile oder Spalte von A mit einer Konstanten k entsteht, so ist $\det(B) = k \cdot \det(A)$.

(b) Ist B die Matrix, die durch Vertauschen zweier Zeilen oder Spalten von A entsteht, so ist $\det(B) = -\det(A)$.

(c) Ist B die Matrix, die aus A durch Addition eines Vielfachen einer Zeile oder Spalte von A hervorgeht, so ist $\det(B) = \det(A)$.

Beispiel 3

Um die Aussagen des obigen Satzes plausibel zu machen, sind die folgenden Determinanten zu berechnen.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 8 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 54 + 48 + 140 - 108 - 40 - 84 = 10$

(b) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 40 \\ 7 & 9 & 8 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 540 + 480 + 1400 - 1080 - 400 - 840 = 100$

(c) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 108 + 40 + 78 - 54 - 48 - 140 = -10$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 8 \\ 3+1k & 5+2k & 6+4k \end{vmatrix}$ $= 9(6+4k)+16(3+k)+28(5+2k)$
$-36(3+k)-8(5+2k)-14(6+4k)$
$= 54+36k+48+16k+140+56k$
$-108-36k-40-16k-84-56k = 10$

9.4 Determinanten von Elementarmatrizen

Wir erinnern uns daran, dass Elementarmatrizen durch eine elementare Zeilenumformung aus der Einheitsmatrix hervorgehen.

Mit Hilfe der Sätze aus den letzten Abschnitten können wir die Determinaten der folgenden Beispiele sofort angeben.

Beispiel 4

Berechne die Determinanten.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$

(c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

9.5 Determinanten von Matrizen mit zueinander proportionalen Zeilen oder Spalten

Enthält eine quadratische Matrix A zwei proportionale Zeilen, so kann man durch Addition eines geeigneten Vielfachen der einen Zeile zur anderen eine Matrix B mit einer Nullzeile erzeugen. Da diese Umformung laut Satz 2.2.3.1 die Determinante nicht verändert und Matrizen mit einer Nullzeile die Determinante 0 haben, gilt $\det(A) = \det(B) = 0$. Eine analoge Aussage gilt auch für proportionale Spalten. Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 9.5.1. *Für eine quadratische Matrix A, die zwei zueinander proportionale Zeilen oder Spalten hat, ist* $\det(A) = 0$.

Beispiel 5

Begründe mit Satz 2.2.5.1, warum die folgenden Determinanten den Wert 0 haben.

(a) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}$ Die 2. Zeile ist das 2-fache der 1. Zeile.

(b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -4 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}$ Die 2. Spalte ist das (-2)-fache der 1. Spalte.

(c) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & -5 \\ 6 & -2 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ -9 & 3 & -12 & 15 \end{vmatrix}$ Die 1. Zeile ist das (-3)-fache der 2. Zeile.

9.6 Determinanten durch Zeilenreduktion

Wir werden jetzt eine Methode zur Determinantenbestimmung angeben, die den hohen Rechenaufwand vermeidet, die bei direkter Anwendung der Definition auftritt. Das Verfahren basiert auf der Idee, die gegebene Matrix durch elementare Zeilenumformungen in eine obere Dreiecksmatrix umzuwandeln und deren Determinante zu berechnen, aus der man dann die gesuchte Determinante ableiten kann. Die Methode wird im folgenden Beispiel vorgestellt.

Beispiel 6

Man bestimme die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung

Die erste und zweite Zeile von A werden vertauscht.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Der gemeinsame Faktor 3 wird aus der ersten Zeile der Determinante gezogen.

$$-1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Das (-2)-fache der ersten Zeile wird zur dritten Zeile addiert.

$$-3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix}$$

Das (-10)-fache der zweiten Zeile wird zur dritten Zeile addiert.

$$-3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix}$$

Da die Matrix untere Dreiecksform hat, kann nun die Determinante als Produkt des Vorfaktors und der Diagonalelemente bestimmt werden:

$$-3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-55) = 165$$

Bemerkung

Die Zeilenreduktion eignet sich gut zur computergestützten Determinantenberechnung, da sie systematisch ist und leicht programmiert werden kann.

10 Eigenwerte und Eigenvektoren

Ist A eine $n \times n$-Matrix und $\mathbf{x}$ ein Vektor aus $\mathbb{R}^n$, so gibt es keine allgemeine geometrische Beziehung zwischen den Vektoren $\mathbf{x}$ und $A\mathbf{x}$. Häufig existieren jedoch von Null verschiedene Vektoren $\mathbf{x}$, so dass $\mathbf{x}$ und $A\mathbf{x}$ skalare Vielfache voneinander sind. Solche Vektoren ergeben sich in natürlicher Weise bei der Untersuchung von Schwingungen, elektrischen Systemen, chemischen Reaktionen, mechanischem Druck sowie der Betrachtung von Problemen aus der Genetik, Quantenmechanik, Ökonomie und Geometrie.

Sei A eine $n \times n$-Matrix. Ein von Null verschiedener Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ heisst *Eigenvektor* von A, wenn $A\boldsymbol{x}$ ein skalares Vielfaches von $\boldsymbol{x}$ ist, das heisst

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

für einen Skalar λ. Die Zahl λ heisst dann *Eigenwert* von A.

Eigenwerte und -vektoren können im $\mathbb{R}^n$ geometrisch interpretiert werden. Ist $\boldsymbol{x}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, also $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, so führt die Multiplikation von $\boldsymbol{x}$ mit A zu einer Streckung oder Stauchung von $\boldsymbol{x}$, wobei für negatives λ noch eine Richtungsumkehrung dazukommt.

Beispiel 10.1

Bildet man die Ortsvektoren

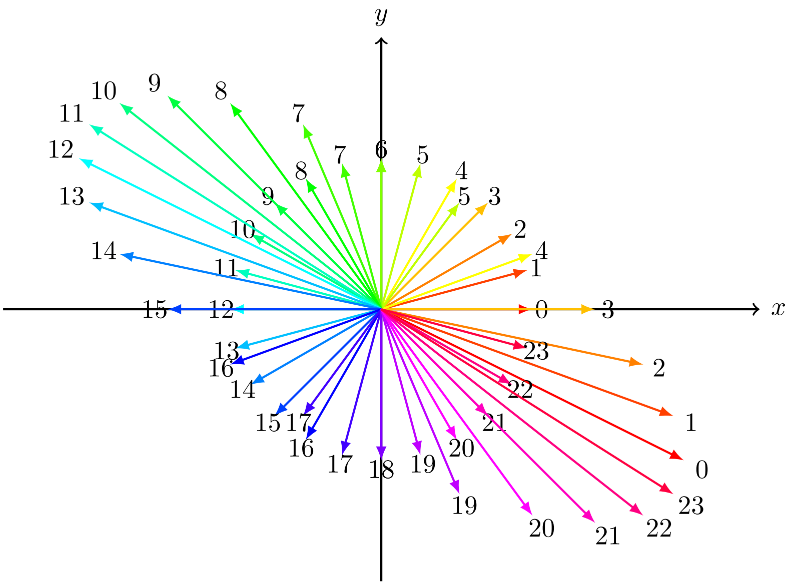
$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix},$$

deren Endpunkte auf dem Einheitskreis liegen, für $\varphi = k \cdot 15°$ $(k = 0, 1, \ldots, 23)$ durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ab, so erhält man Bildvektoren $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$, deren Endpunkte auf einer Ellipse liegen.

Da einander entsprechende Bild- und Urbildvektoren gleich nummeriert sind, lassen sich die Eigenvektoren und die Eigenwerte näherungsweise mit dem Auge bestimmen.



Vektoren in Richtung 90° (bzw. 270°):

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Eigenwert: $\lambda = 1$

Eigenvektor(en): $k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vektoren in Richtung 135° (bzw. 315°):

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Eigenwert: $\lambda = 2$

Eigenvektor(en): $k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Um die Eigenwerte einer $n \times n$-Matrix A zu bestimmen, schreiben wir die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ als

$$A\boldsymbol{x} = \lambda I \boldsymbol{x} \quad (I \text{ ist die } n \times n\text{-Einheitsmatrix})$$

oder äquivalent dazu

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

Damit λ ein Eigenwert von A ist, muss diese Gleichung eine nichttriviale Lösung besitzen. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Matrix $A - \lambda I$ nicht invertierbar ist, was wiederum genau dann der Fall ist, wenn gilt:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Diese Gleichung heisst *charakteristische Gleichung* von A; ihre Lösungen sind die *Eigenwerte* von A. Bei der Berechnung von $\det(A - \lambda I)$ ergibt sich ein Polynom in λ, das als *charakteristisches Polynom* von A bezeichnet wird. Das charakteristische Polynom einer $n \times n$-Matrix A hat den Grad n und somit die Gestalt:

$$\det(A - \lambda I) = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \ldots c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_n\lambda^n$$

Da die charakteristische Gleichung

$$c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \ldots c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_n\lambda^n = 0$$

nach dem Fundamentalsatz der Algebra höchstens n verschiedene Lösungen hat, besitzt eine $n \times n$-Matrix höchstens n unterschiedliche Eigenwerte.

Beispiel 10.2

Gesucht: Eigenwerte und Eigenvektoren von $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung

Charakteristisches Polynom von A:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] \\ &= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind die Lösungen der charakteristischen Gleichung:

$$\begin{aligned} (2-\lambda)(1-\lambda) &= 0 \\ \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 2 \end{aligned}$$

Ein Vektor $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ ist genau dann ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, wenn er die Gleichung

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

und damit auch die Gleichung

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

erfüllt.

$\lambda = 1$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(raten oder RREF bestimmen)} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Eigenraum zum Eigenvektor $\lambda = 1$: $\left\{ t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$

$\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$$

Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = 2$:

$$\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Zur Kontrolle der Eigenwerte und ihrer Berechnung im Fall von 2×2-Matrizen bietet sich der folgende Satz an.

Satz 10.1

(a) Das Produkt der n Eigenwerte ist gleich $\det A$.

(b) Die Summe der n Eigenwerte ist gleich $\operatorname{tr} A$

ohne Beweis

10.1 Eigenwerte von Dreiecksmatrizen

Bei Dreiecksmatrizen ist die Berechnung der Eigenwerte einfach:

Gesucht: Eigenwerte von $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33}-\lambda & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Die Determinante einer Dreiecksmatrix das Produkt ihrer Hauptdiagonalelemente:

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda)(a_{44}-\lambda) = 0$$

Also: $\lambda_1 = a_{11}$
$\lambda_2 = a_{22}$
$\lambda_3 = a_{33}$
$\lambda_4 = a_{44}$

Deshalb gilt:

Satz 10.2

Ist A eine $n \times n$-Dreiecksmatrix (eine obere oder untere Dreiecksmatrix oder eine Diagonalmatrix), so sind die Eigenwerte von A die Hauptdiagonalelemente von A.

Beispiel 10.3

Gegeben: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Gesucht: Eigenwerte und Eigenräume von A

Eigenwerte (gemäss Satz 10.2): $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$

Eigenraum zu $\lambda = 1$:

$$(A - 1 \cdot I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{RREF}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Die dritte Spalte ist keine Pivotspalte $\quad \Rightarrow \quad x_3 \overset{*}{=} 2t$ frei wählbar

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ 2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

* Diese Wahl vermeidet Brüche.

Eigenraum zu $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$:

$$(A - 1 \cdot I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{RREF}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 0$

Die zweite und dritte Spalte sind keine Pivotspalten

$\Rightarrow \quad x_2 = s$ und $x_3 = t$ (frei wählbar)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung

Es ist nicht immer so, dass zu einem mehrfachen Eigenwert auch eine entsprechende Anzahl an Eigenvektoren existieren muss. Es werden daher folgende Begriffe verwendet:

- *algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ_i:* Anzahl der Linearfaktoren $(\lambda - \lambda_i)$ in der charakteristischen Gleichung
- *geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ_i:* Die Dimension des Eigenraums zum Eigenwert λ_i

Im Beispiel 10.3 gilt:

Eigenwert:	$\lambda = 1$	$\lambda = 3$
algebraische Vielfachheit	1	2
geometrische Vielfachheit	1	2

Zusammenfassung

Lösung des Eigenwertproblems für eine $n \times n$-Matrix:

1. Berechne die Determinante von $A - \lambda I$.
2. Die Lösungen von $\det(A - \lambda I) = 0$ sind die Eigenwerte von A.
3. Löse das Gleichungssystem $\det(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ für jedes λ.

10.2 Komplexe Eigenwerte

Beispiel 10.4

Da die Drehmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

jeden Vektor um 90° dreht, kann es ausser dem Nullvektor keinen Eigenvektor $\boldsymbol{x}$ mit $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ geben – ausser man lässt komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren zu.

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 0-\lambda & -1 \\ 1 & 0-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = \mathrm{i}$$

$$\lambda_2 = -\mathrm{i}$$

Eigenraum zu $\lambda = \mathrm{i}$:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{RREF}$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenraum zu $\lambda = \mathrm{i}$: $t\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$

Eigenraum zu $\lambda = -\mathrm{i}$:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i} & -1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{RREF}$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i} & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenraum zu $\lambda = -\mathrm{i}$: $t\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$

10.3 Eigenwerte von Potenzen einer Matrix

Aus den Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix A lassen sich leicht die Eigenwerte und Eigenvektoren einer postitiven ganzzahligen Potenz von A berechnen:

$$A^2\boldsymbol{x} = A(A\boldsymbol{x}) = A(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda^2\boldsymbol{x}$$

Also ist λ^2 ein Eigenwert und $\boldsymbol{x}$ ein Eigenvektor von A^2. Allgemein:

Satz 10.3

Ist k eine positive, ganze Zahl und $\boldsymbol{x}$ ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ, so ist λ^k ein Eigenwert von A^k und $\boldsymbol{x}$ ein zugehöriger Eigenvektor.

Beispiel 10.5

In Beispiel 10.2 haben wir gezeigt, dass

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ besitzt.

Nach dem letzten Satz sind dann $\lambda_1^4 = 1^4 = 1$ und $\lambda_2^4 = 2^4 = 16$ die Eigenwerte von A^4.

Ferner sind $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ die zugehörigen Eigenvektoren.

10.4 Eigenwerte und Invertierbarkeit

Satz 10.4

Eine $n \times n$-Matrix A ist genau dann singulär, wenn $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A ist.

Beweis

$\lambda = 0$ ein genau dann ein Eigenwert von A, wenn

$$\begin{aligned} \det(A - 0 \cdot I) &= \det A \\ &= c_0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0^2 + \cdots + c_n \cdot 0^n \\ &= c_0 = 0 \end{aligned}$$

Dies ist aber nach Eigenschaft 8 im letzten Kapitel genau dann der Fall, wenn A nicht invertierbar ist. $\square$

Bemerkung

Die in der Praxis auftretenden Matrizen sind oft so gross, dass die exakte Berechnung der Eigenwerte als Lösungen der charakteristischen Gleichung hoffnungslos ist.

In diesen Fällen verwendet man geeignete Approximationsverfahren.

11 Diagonalisierung

Wir konstruieren Basen des R^n, die aus Eigenvektoren einer gegebenen $n \times n$-Matrix A bestehen. Diese Basen können sowohl zur Untersuchung geometrischer Eigenschaften von A als auch zur Vereinfachung unterschiedlicher numerischer Berechnungen herangezogen werden. Daneben sind sie in einer Vielzahl von Anwendungen von physikalischer Bedeutung.

11.1 Diagonalisierung einer Matrix

Beispiel 1

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 3$ Eigenwerte und

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die entsprechenden Eigenvektoren von A sind.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ok}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ok}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ok}$$

Bilde aus den Eigenvektoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ die 3×3-Matrix $P = (\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3)$ und bestimme ihre Inverse P^{-1}.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechne $P^{-1}AP$. Was vermutest du aufgrund des Resultats?

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Vermutung:

Es entsteht eine Diagonalmatrix, mit den Eigenwerten auf der Diagonalen.

Das obige Beispiel gibt Anlass zu folgender Definition:

Eine quadratische Matrix A heisst *diagonalisierbar*, wenn eine invertierbare Matrix P existiert, so dass P^1AP Diagonalgestalt hat.

Man sagt dann: Die Matrix P diagonalisiert A.

11.2 Geometrische und algebraische Vielfachheit

Wir werden nun, ohne auf die Details einzugehen, einige Aussagen über die Diagonalisierbarkeit von Matrizen angeben.

Satz 11.2.1. *Eine $n \times n$-Matrix A mit n verschiedenen Eigenwerten ist diagonalisierbar.*

Nun gibt es Matrizen, die weniger als n verschiedene Eigenwerte haben, aber trotzdem diagonalisierbar sind. An dieser Stelle ist es sinnvoll, die folgenden Begriffe einzuführen:

- Tritt ein Eigenwert λ in der charakteristischen Gleichung k-fach auf, so wird k die *algebraische Vielfachheit* von λ genannt.
- Die Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren zu einem Eigenwert λ wird *geometrische Vielfachheit* von λ genannt.

Von den folgenden Matrizen, sind die charakteristische Gleichung und die Eigenvektoren zu den entsprechenden Eigenwerten gegeben. Gib die algebraische und geometrische Vielfachheit an.

Beispiel 2 (a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (\lambda-1)(\lambda-2)^2 = 0$$

$$\lambda = 1\colon \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alg. Vielfachheit: 1
Geom. Vielfachheit: 1

$$\lambda = 2\colon \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alg. Vielfachheit: 2
Geom. Vielfachheit: 2

Beispiel 2 (b)

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 3)^2 = 0$$

$\lambda = 3$: $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Alg. Vielfachheit: 2
Geom. Vielfachheit: 1

Beispiel 2 (c)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 2)^4 = 0$$

$\lambda = 2$: $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Alg. Vielfachheit: 4
Geom. Vielfachheit: 2

Den folgenden Satz über die Diagonalisierbarkeit einer Matrix geben wir ohne Beweis an.

Satz 11.2.2. *Für eine quadratische Matrix A gilt.*

(a) Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes von A ist nicht grösser als seine algebraische Vielfachheit.

(b) A ist genau dann diagonalisierbar, wenn die geometrische Vielfachheit jedes Eigenwertes mit seiner algebraischen Vielfachheit übereinstimmt.

Möchte man nur feststellen, ob A diagonalisierbar ist, ohne die diagonalisierende Matrix P auszurechnen, so kann man auf die Bestimmung der Eigenraumbasen verzichten; es genügt, die Dimensionen der Eigenräume zu kennen.

Beispiel 3

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

hat die charakteristischen Gleichung

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

und somit die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$.

Der Eigenraum zu $\lambda = 1$ ist der Lösungsraum von

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix hat den *Defekt* 1 (die Anzahl der Nullzeilen in der Zeilenstufenform), woraus folgt, dass der Lösungsraum eindimensional ist und die geometrische Vielfachheit 1 beträgt.

Als Eigenraum zu $\lambda = 2$ erhalten wir den Lösungsraum von

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Koeffizientenmatrix hat den Defekt 1, also ist auch der Eigenraum zu $\lambda = 2$ eindimensional.

Da beim Eigenwert $\lambda = 2$ die algebraische und die geometrische Vielfachheit nicht übereinstimmen, ist A nicht diagonalisierbar.

11.3 Berechnung von Matrixpotenzen

Es gibt zahlreiche Probleme in der angewandten Mathematik, die die Berechnung hoher Potenzen einer quadratischen Matrix erfordern. Wir wollen diesen Abschnitt damit beenden, dass wir zeigen, wie solche Berechnungen für diagonalisierbare Matrizen vereinfacht werden können.

Ist A eine $n \times n$-Matrix und P invertierbar, so ist

$$(P^{-1}AP)^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}AIAP = P^{-1}A^2P.$$

Allgemein gilt für jede positive ganze Zahl k

$$(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP.$$

Ist A diagonalisierbar und $P^{-1}AP = D$ die resultierende Diagonalmatrix, so folgt daraus

$$P^{-1}A^kP = (P^{-1}A)^kP = D^k$$

und damit:

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

Diese Gleichung beschreibt die k-te Potenz von A mit Hilfe der k-ten Potenz der Diagonalmatrix D. Diese Matrix ist jedoch leicht zu berechnen.

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n^k \end{pmatrix}$$

Beispiel 4

Man berechne A^{10} für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung

Aufgrund von Beispiel 1 wissen wir, dass A durch

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

diagonalisiert wird, wobei sich die Diagonalmatrix

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}AP \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ergibt.

Also folgt

$$\begin{aligned} A^{10} &= PD^{10}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 59\,049 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 59\,048 & 59\,048 \\ 0 & 59\,049 & 59\,048 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$