



Addiere die Zeile 3 zur Zeile 2:

$$\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \end{array}$$

Addiere die Zeile 2 zum 2-fachen von Zeile 1:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \end{array}$$

Multipliziere Zeile 2 mit  $-\frac{1}{4}$ :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \end{array}$$

Multipliziere Zeile 1 mit  $\frac{1}{2}$ :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \end{array}$$

### Aufgabe 6.5

$$\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Addiere das 2-fache von Zeile 1 zum 3-fachen von Zeile 2:

$$\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Addiere das  $-1$ -fache von Zeile 1 zum 3-fachen von Zeile 3:

$$\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & -1 & 0 & 3 \end{array}$$

Addiere die Zeile 2 zur Zeile 3:

$$\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & -3 \end{array}$$

Wir können aufhören, da die Matrix wegen der Nullzeile nicht invertierbar ist.

### Aufgabe 6.6

$$\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Addiere das 2-fache von Zeile 1 zur Zeile 2:

$$\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Addiere das  $-1$ -fache von Zeile 1 zur Zeile 3:

$$\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

Tausche die Zeilen 1 und 2.

$$\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

Addiere die Zeile 3 zur Zeile 2:

$$\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

Addiere das 2-fache von Zeile 3 zur Zeile 1:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

Multipliziere Zeile 3 mit  $-1$ :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Addiere das 2-fache von Zeile 2 zur Zeile 1:

$$\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -9 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Multipliziere Zeile 2 mit  $-1$ :

$$\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -9 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Multipliziere Zeile 1 mit  $-1$ :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

## Aufgabe 6.7

- (a) Die ersten beiden Kolonnen enthalten die elementaren Umformungen an  $A$  bzw.  $I$ . Die dritte Kolonne enthält die jeweilige Elementarmatrix  $E_i$ .

$$\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

Addiere das  $4/3$ -fache von Zeile 1 zur Zeile 2:

$$\begin{array}{cc|cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 4/3 & 1 & 4/3 & 1 \end{array}$$

Addiere das  $-3$ -fache von Zeile 2 zur Zeile 1:

$$\begin{array}{cc|cc|cc} 3 & 0 & -3 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1/3 & 4/3 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Multipliziere Zeile 2 mit 3:

$$\begin{array}{cc|cc|cc} 3 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 3 \end{array}$$

Multipliziere Zeile 1 mit  $1/3$ :

$$\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & -1 & -1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}$$

Also ist

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_4} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{E_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4/3 & 1 \end{pmatrix}}_{E_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_I$$

- (b) Multiplizieren wir obige Gleichung von rechts mit  $A^{-1}$ , so erhalten wir:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_4} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{E_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4/3 & 1 \end{pmatrix}}_{E_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A \cdot A^{-1} = I} = A^{-1}$$

- (c) Multiplizieren wir die Gleichung von (a) von rechts her sukzessive mit den Inversen  $E_4^{-1}, E_3^{-1}, \dots$ , so erhalten wir:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4/3 & 1 \end{pmatrix}}_{E_1^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_2^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}}_{E_3^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_4^{-1}}$$

## Aufgabe 6.8

Vertauschen der Zeilen 1 und 2:

$$\begin{pmatrix} b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{pmatrix}$$

Addiere das  $-d/a$ -fache der zweiten Zeile zur dritten Zeile:

$$\begin{pmatrix} b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{pmatrix}$$

Vertausche die dritte und vierte Zeile:

$$\begin{pmatrix} b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{pmatrix}$$

Addiere das  $-h/e$ -fache von Zeile 4 zur Zeile 5:

$$\begin{pmatrix} b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also enthält die reduzierte Zeilenstufenform von  $A$  eine Nullzeile. Aufgrund eines Satzes aus dem Skript ist dies gleichbedeutend damit, dass  $A$  nicht invertierbar ist.

invertierbar.