Aufgabe 5.1

- $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$
- $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Also beträgt der Index $k = 3$

Aufgabe 5.2

(a) $A + B = B + A$ *wahr*

(b) $AB = BA$ *falsch*

(c) $(A + B)^T = A^T + B^T$ *wahr*

(d) $(AB)^T = A^T B^T$ *falsch*

(e) $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$ *wahr*

(f) $AB = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$ oder $B = 0$ *falsch*

Aufgabe 5.3

$$\begin{pmatrix} 4 & a \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & a \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & a \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 16 + ab & 4a + a^2 \\ 4b + ab & ab + a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & a \\ b & a \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich das (nichtlineare) Gleichungssystem:

$$\begin{array}{c} 16 + ab = 4 \\ 4a + a^2 = a \\ 4b + ab = b \\ ab + a^2 = a \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} 16 + ab = 4 \\ a(4 + a) = a \\ b(4 + a) = b \\ a(b + a) = a \end{array}$$

Aus der 2. und 3. Gleichung folgt $a = -3$.

Aus der 1. und 4. Gleichung folgt $b = 4$.

Aus der ersten Gleichung folgt dass $a \neq 0$ und $b \neq 0$.

Aufgabe 5.4

(a) Bestimme den kleinsten Exponenten $k \in \mathbb{N}$, für den $A^k = A$ gilt.

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

(b) $A^{999} = \left(A^{100}\right)^{10} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

oder:

$$A^{999} = A^{999-249\cdot 4} = A^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.5

$$\left(I - 2A^T\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \quad || \quad \text{invertieren}$$

$$I - 2A^T = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -8 & -5 \end{pmatrix} = 2A^T$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} = 2A^T$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$