Komplexe Zahlen

Theorie

Version vom 4. April 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Zahlenbereichserweiterungen

Die Menge der natürlichen Zahlen

Der „natürliche Zählprozess“ führt zu Mengen der folgenden Form:

oder

In $\mathbb{N}$ können wir beispielsweise Gleichungen der Art

$x - 7 = 0$

lösen.

Die Menge der ganzen Zahlen

Bildet man zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ihre Gegenzahl $-n$, und vereinigt die so entstandene Menge mit $\mathbb{N}$, so erhält man die *Menge der ganzen Zahlen*:

In $\mathbb{Z}$ können wir beispielsweise Gleichungen vom Typ

$x - 7 = 0$

oder

$x + 7 = 0$

lösen.

Die Menge der rationalen Zahlen

Die Menge aller Brüche p/q mit aus einem Zähler $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$, nennt man die Menge der *rationalen Zahlen*:

Die schriftliche Division zweier ganzer Zahlen lehrt uns, dass das Resultat entweder eine endliche ($5/4 = 1.25$) oder eine nicht endliche aber periodische Darstellung ($2/3 = 0.666\ldots$) besitzt.

In $\mathbb{Q}$ können wir beispielsweise Gleichungen der Form

$5x - 7 = 0 \quad$ oder $\quad 5x + 7 = 0$

lösen.

Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen

Untersuchen wir die Grenzwerte von Folgen in $\mathbb{Q}$, so erhalten wir einen neuen Typ von Zahlen.

Beispiel 1.1

$x_1 = 1$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{3}{x_1}\right) =$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{3}{x_2}\right) =$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{3}{x_3}\right) =$$

$$x_5 = \frac{1}{2}\left(x_4 + \frac{3}{x_4}\right) =$$

$\ldots \lim\limits_{n\to\infty} x_n =$

Beispiel 1.2

$x_1 = 2$

$$x_2 = x_1 + \frac{1}{2!} =$$

$$x_3 = x_2 + \frac{1}{3!} =$$

$$x_4 = x_3 + \frac{1}{4!} =$$

$$x_5 = x_4 + \frac{1}{5!} =$$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \mathrm{e} \approx 2.7181828\ldots$

Die Menge der reellen Zahlen

Die neuen Zahlen, die wir durch den oben beschriebenen Prozess erhalten, werden *irrationale Zahlen* genannt. Fügen wir sie zu den rationalen Zahlen hinzu, sprechen wir von den *rellen Zahlen*. Für sie gibt es eine einfache Beschreibung:

$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist eine abbrechende oder nichtabbrechende Dezimalzahl}\}$

In $\mathbb{R}$ können wir beispielsweise Gleichungen der Form

$x^2 - 2 = 0$

lösen.

Die imaginäre Einheit

Eine Art von Gleichung können wir jedoch mit den bisher bekannten Zahlen nicht lösen:

$$x^2 + 1 = 0$$

Trick: Wir geben der Zahl, die die Gleichung oben löst, einen Namen.

Damit können wir die Gleichung lösen:

imaginäre Zahlen

Relle Vielfache von i werden *imaginäre Zahlen* genannt.

Beispiele für imaginäre Zahlen:

- $5\,\mathrm{i}$
- $-\sqrt{2}\,\mathrm{i}$

Komplexe Zahlen

Addiert man zu einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ die imaginäre Zahl $b\,\mathrm{i}$, so entsteht eine *komplexe Zahl* z:

$$z = a + b\,\mathrm{i}$$

a heisst *Realteil* und b *Imaginärteil* von z.

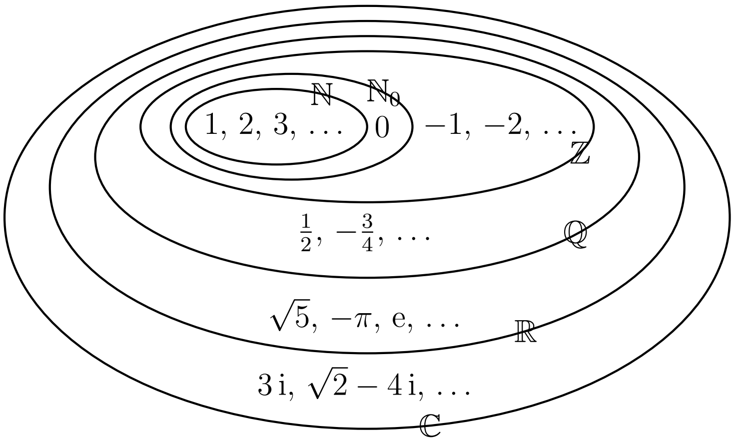
Achtung: a und b sind beide *reell*!

$\mathbb{C} = \{a + b\,\mathrm{i} \colon a \in \mathbb{R} \text{ und } b \in \mathbb{R}\}$

Beispiel 1.4

	z	Realteil	Imaginärteil
(a)	$5 + 3\,\mathrm{i}$		
(b)	$7 - \frac{3}{4}\,\mathrm{i}$		
(c)	$-\pi$		
(d)	$5.2\,\mathrm{i}$		

Das Gesamtbild



1.2 Rechenregeln

Allgemeines

Grundsätzlich gilt beim Rechnen mit komplexen Zahlen:

- Behandle die imaginären Einheit i wie eine „normale“ Variable.
- Ersetze i^2 durch -1.

Addition

$(5 + 3\,\mathrm{i}) + (7 - 4\,\mathrm{i}) =$

Subtraktion

$(9 - \mathrm{i}) - (6 + 2\,\mathrm{i}) =$

Multiplikation

$(5 - 2\,\mathrm{i})(2 + 3\,\mathrm{i}) =$

Division

$$\frac{16 + 11\mathrm{i}}{2 + 3\mathrm{i}} =$$

Vorsicht

In vielen Büchern findet man die Definition $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ anstelle von $\mathrm{i}^2 = -1$. Dies führt jedoch mit bestehenden Rechenregeln zu Widersprüchen:

Um das zu vermeiden, merkt man sich:

i ist diejenige Zahl, deren Quadrat -1 ergibt.

Anwendung

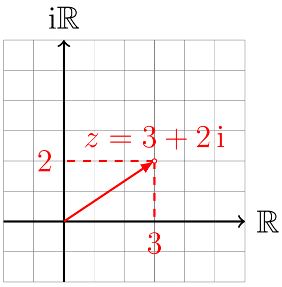
Jede quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten besitzt mindestens eine komplexe Lösung!

$x^2 - 6x + 13 = 0$

Diskriminante:

1.3 Geometrische Deutung

Auf C. F. Gauss (1777–1855) geht die Darstellung einer komplexen Zahl $z = a + b\,\mathrm{i}$ als Punkt (a, b) in der *komplexen Zahlenebene* (oder *Gaussschen Zahlenebene*) zurück.

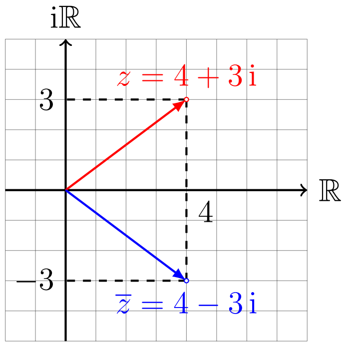


1.4 Die konjugiert komplexe Zahl

Ist $z = a + b\,\mathrm{i}$ eine komplexe Zahl, so ist die *konjugiert komplexe Zahl* $\overline{z}$ definiert durch:

$$\overline{z} = a - b\,\mathrm{i}$$

In der Gaussschen Zahlenebene entsteht $\overline{z}$ durch Spiegelung von z an der reellen Achse.

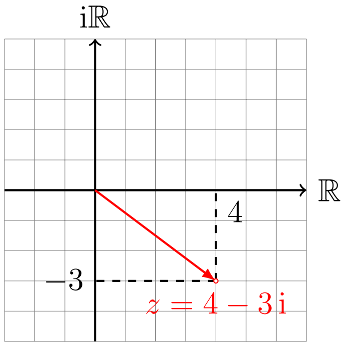


1.5 Der Betrag einer komplexen Zahl

Der Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl z ist definiert durch:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

In der Gaussschen Zahlenebene entspricht der Betrag $|z|$ dem Abstand des Punkts z vom Ursprung.

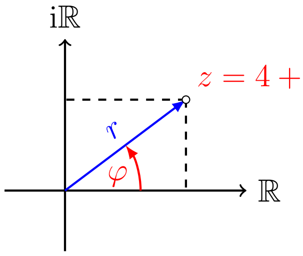


$$|z| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Bemerkung: Komplexe Zahlen lassen sich nicht wie reelle Zahle der Grösse nach ordnen. Oder welche der Zahlen $5 + 3\,\mathrm{i}$ bzw. $2 + 6\,\mathrm{i}$ soll die grössere sein?

2 Die Polarform komplexer Zahlen

Anstelle zweier kartesischer Koordinaten können sogenannte *Polarkoordinaten* treten.



Durch Angabe von

- $r = |z|$ (Abstand zum Ursprung)
- $\varphi = \arg(z)$ (Winkel zur positiven reellen Achse)

ist ein Punkt ebenfalls eindeutig bestimmt.

Die beiden zugehörigen Abbildungen lauten:

- $$\begin{aligned} |\ |\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{R}_0^+ \\ z &\mapsto |z| \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \arg\colon \mathbb{C} &\to [0°, 360°) \\ z &\mapsto \arg(z) \end{aligned}$$

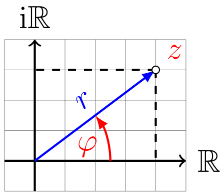
  bzw.

  $$\begin{aligned} \arg\colon \mathbb{C} &\to [0, 2\pi) \\ z &\mapsto \arg(z) \end{aligned}$$

Beachte: $\arg(0°)$ ist nicht definiert, da dem Ursprung jeder beliebige Winkel zugeordnet werden kann.

Beispiel 2.1

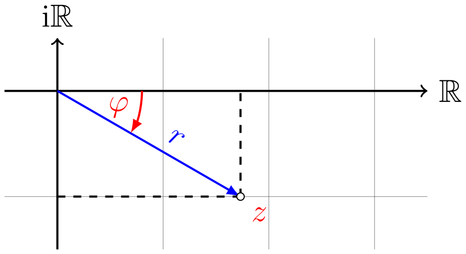
$z = 4 + 3\mathrm{i}$



Polarkoordinaten von z:

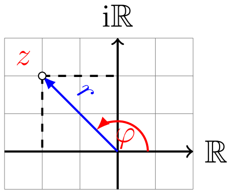
Beispiel 2.2

$z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$



Beispiel 2.3

$z = -2 + 2\mathrm{i}$



kartesische Koordinaten → Polarkoordinaten

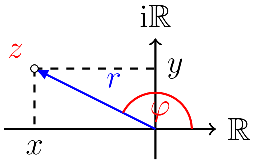
Gegeben: $z = x + \mathrm{i}y$ Gesucht: $z = (r, \varphi)$

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x} & \text{für } x > 0 \\ \arctan \dfrac{y}{x} + 180^\circ & \text{für } x < 0 \\ 90^\circ & \text{für } x = 0,\ y > 0 \\ 270^\circ & \text{für } x = 0,\ y < 0 \\ \text{nicht definiert} & \text{für } x = 0,\ y = 0 \end{cases}$$

Beispiel 2.4

$z = (4, 150°) \overset{?}{=} x + \mathrm{i}\, y$



Polarkoordinaten → kartesische Koordinaten

Gegeben: $z = (r, \varphi)$ Gesucht: $z = x + \mathrm{i}\, y$

- $x = r \cdot \cos\varphi$
- $y = r \cdot \sin\varphi$

TI-84 Plus

Unter $\boxed{\text{2nd}}$ angle findet man:

Befehl	1. Argument	2. Argument	Resultat
R▶Pr(x,y)	x	y	r
R▶Pθ(x,y)	x	y	θ
P▶Rx(r,θ)	r	θ	x
P▶Ry(r,θ)	r	θ	y

cis-Form

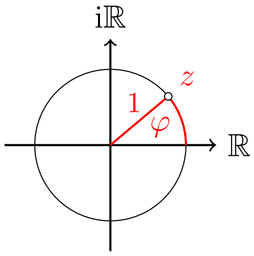
Aus der letzten Umrechnungsformel folgt:

$z =$

Definition:

Bemerkung

Die cis-Funktion ordnet jedem Winkel φ den Punkt $z = \text{cis}(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ auf dem Einheitskreis zu.



$$\begin{aligned} \text{cis}\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \text{cis}(\varphi) = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi \end{aligned}$$

Schränkt man den Definitionsbereich auf $[0, 2\pi)$ bzw. auf $[0, 360°)$ ein, so ist die cis-Funktion *bijektiv* (*umkehrbar eindeutig*).

Beispiel 2.5

(a) $\text{cis}\, 0° =$

(b) $\text{cis}\, 90° =$

(c) $\text{cis}\, 180° =$

(d) $\text{cis}\, 270° =$

(e) $\text{cis}\, 45° =$

2.1 Rechenregeln für die Polarform

Gegeben: $z_1 = r_1 \cdot \text{cis}\,\varphi_1$ und $z_2 = r_2 \cdot \text{cis}\,\varphi_2$

Produktregel

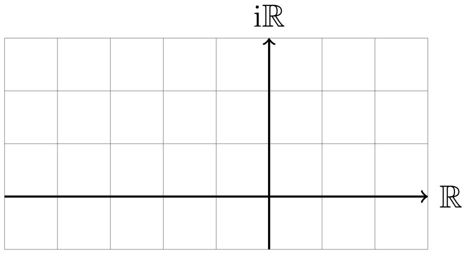
$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \text{cis}(\varphi_1 + \varphi_2)$

Zwei komplexe Zahlen in Polarform werden multipliziert, indem man ihre Radien multipliziert und ihre Winkel addiert.

Die Multiplikation mit komplexen Zahlen entspricht geometrisch einer *Drehstreckung*.

Beispiel 2.6

- $z_1 = 1 + \mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad z_1 =$
- $z_2 = -2 + 2\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad z_2 =$
- $z_3 = z_1 \cdot z_2 = \qquad \Leftrightarrow \quad z_3 = z_1 \cdot z_2 =$



Die Formel von de Moivre

Durch wiederholte Anwendung der Produktregel ergibt sich die *Formel von de Moivre:*

$$\begin{aligned} z^n &= z \cdot z \cdot \ldots \cdot z \\ &= (r \cdot \text{cis}\,\varphi) \cdot (r \cdot \text{cis}\,\varphi) \cdot \ldots \cdot (r \cdot \text{cis}\,\varphi) \\ &= (r \cdot r \cdot \ldots \cdot r) \cdot (\text{cis}\,\varphi \cdot \text{cis}\,\varphi \ldots \cdot \text{cis}\,\varphi) \\ &= r^n \cdot \text{cis}(n \cdot \varphi) \end{aligned}$$

Eine komplexe Zahl in Polarform wird mit einer natürlichen Zahl n potenziert, indem man ihren Radius mit n potenziert und den ihren Winkel mit n multipliziert.

Ist $z = r \cdot \text{cis}\,\varphi$ eine komplexe Zahl, so gilt für ihren Kehrwert

Quotientenregel

Wenden wir dieses Resultat und die Produktregel auf $z_1 : z_2$ an, erhalten wir die *Quotientenregel* der Polarform:

$$\begin{aligned} z_1 : z_2 &= z_1 \cdot z_2^{-1} \\ &= r_1 \cdot \operatorname{cis}(\varphi_1) \cdot r_2^{-1} \cdot \operatorname{cis}(-\varphi_2) \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \operatorname{cis}(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned}$$

Zwei komplexe Zahlen in Polarform werden dividiert, indem man ihre Radien dividiert und ihre Winkel subtrahiert.

Mit $z^0 = 1$ gilt damit die Formel von de Moivre für all $n \in \mathbb{Z}$.

2.2 Die Exponentialform komplexer Zahlen

Satz: Es gilt $r \cdot \operatorname{cis}\varphi = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ (Exponentialform komplexer Zahlen)

Beweisskizze: Zur Erinnerung

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{und allgemein} \quad \mathrm{e}^a = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$$

Die Operationen für komplexen Zahlen wurden so definiert, dass die von den reellen Zahlen bekannten Rechenregeln auch in $\mathbb{C}$ gültig sind (*Permanenzprinzip*). Daher ist der Grenzwert

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{n}\right)^n$$

sinnvoll definiert. Aber was stellt er dar? Eine geometrische Untersuchung von $\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{n}\right)^n$ in der Gaussschen Zahlenebene gibt einen Einblick.

Die Potenz

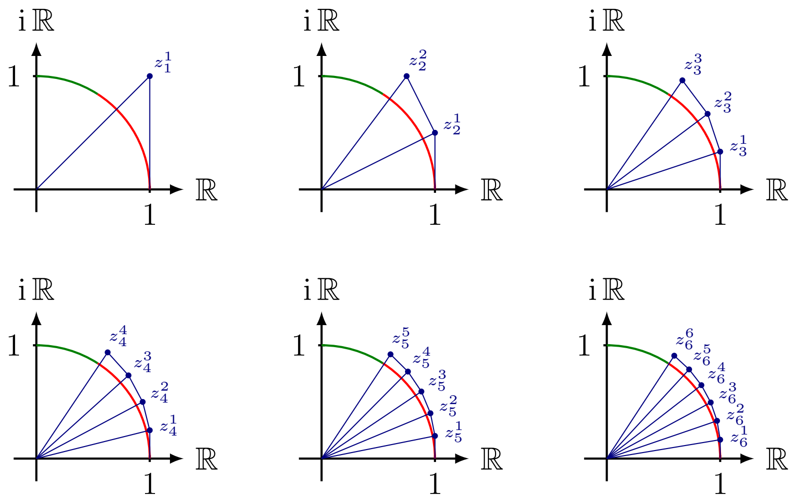
$$\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{n}\right)^n$$

kann als fortgesetzte Multiplikation mit $z_n = 1 + \mathrm{i}/n$ und somit geometrisch als Drehstreckung mit

- dem Streckungsfaktor $|z_n| = \sqrt{1 + 1/n^2}$ und
- dem Drehwinkel $\arg(z_n) = \arctan(1/n)$

gedeutet werden.

Beim Potenzieren von z_n entsteht somit eine Folge ähnlicher rechtwinkliger Dreiecke, bei denen die längere Kathete eines aufgesetzten Dreiecks mit der Hypotenuse des darunter liegenden Dreiecks zusammenfällt.



Die Potenzen

$$|z_n|^k = \left|1 + \frac{\mathrm{i}}{n}\right|^k = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^k} \quad (1 \le k \le n)$$

bilden eine monoton wachsende Folge.

$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$\lvert z_1\rvert^1 \approx 1.414$	$\lvert z_2\rvert^1 \approx 1.118$	$\lvert z_3\rvert^1 \approx 1.054$	$\lvert z_4\rvert^1 \approx 1.031$
	$\lvert z_2\rvert^2 = 1.250$	$\lvert z_3\rvert^2 \approx 1.111$	$\lvert z_4\rvert^2 \approx 1.063$
		$\lvert z_3\rvert^3 \approx 1.171$	$\lvert z_4\rvert^3 \approx 1.095$
			$\lvert z_4\rvert^4 \approx 1.129$

Offenbar gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n|^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left|1 + \frac{\mathrm{i}}{n}\right|^n = 1$

Die Längen der kurzen Katheten bilden eine monoton wachsende Folge:

$$b_{n,k} = \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{k-1}} = \sqrt{\frac{1}{n^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{k-1}}$$

$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$b_{1,1} = 1.000$	$b_{2,1} = 0.500$	$b_{3,1} \approx 0.333$	$b_{4,1} = 0.250$
	$b_{2,2} \approx 0.559$	$b_{3,2} \approx 0.351$	$b_{4,2} \approx 0.258$
		$b_{3,3} \approx 0.370$	$b_{4,3} \approx 0.266$
			$b_{4,4} \approx 0.274$
$s_1 = 1.000$	$s_2 \approx 1.059$	$s_3 \approx 1.055$	$s_4 \approx 1.047$

Die Folge der Teilsummen (s_n) konvergiert gegen 1.

Das bedeutet, dass der gesuchte Grenzwert die komplexe Zahl z mit $|z| = 1$ und $\arg \varphi = 1$ (φ im Bogenmass) sein muss:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{n}\right)^n = 1 \cdot \operatorname{cis} 1 \quad \text{(Bogenmass)}$$

Mit Hilfe des obigen Resultats und des Satzes von de Moivre gilt für $\varphi \in \mathbb{Z}$:

$$r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i} \cdot \varphi} = r \cdot \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\right)^{\varphi} = r \cdot \left(1 \cdot \operatorname{cis} 1\right)^{\varphi} = r \cdot 1^{\varphi} \cdot \operatorname{cis}(\varphi \cdot 1) = r \cdot \operatorname{cis} \varphi$$

$\square$

Bemerkung

In der Exponentialdarstellung benötigen wir keine „seperaten“ Rechenregeln für Produkte, Quotienten und Potenzen. Diese Operationen lassen sich mit den bekannten Potenzgesetzen erklären:

- $z_1 \cdot z_2 = r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1} \cdot r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2)}$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}}{r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}} = \dfrac{r_1}{r_2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi_2)}$
- $(z)^s = \left(r \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^s = r^s \cdot \mathrm{e}^{s \cdot \mathrm{i}\varphi}$

3 Gleichungen in $\mathbb{C}$

Satz

Zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 sind genau dann gleich, wenn ihre Real- und Imaginärteile übereinstimmen. Formal:

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \quad \wedge \quad \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$$

3.1 Lineare Gleichungen

Beispiel 3.1

$3z + 5\overline{z} = 1 + \mathrm{i}$

3.2 Lineare Gleichungssysteme

Beispiel 3.2

$$\begin{aligned} (2-2\mathrm{i})v + 3\mathrm{i}w &= 1 + 4\mathrm{i} \\ (1+2\mathrm{i})v - 3w &= 2 + 2\mathrm{i} \end{aligned}$$

Lineare Gleichungssysteme in $\mathbb{C}$ können wie lineare Gleichungssysteme in $\mathbb{R}$ gelöst werden.

PAM-Formelsammlung S. 33 und 31

Ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= k_1 \\ a_2x + b_2y &= k_2 \end{aligned}$$

hat genau eine Lösung (x, y), wenn

$$D = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0.$$

Dann ist $x = D_x/D$ und $y = D_y/D$, wobei

$$D_x = \det \begin{pmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{pmatrix} = k_1b_2 - b_1k_2$$

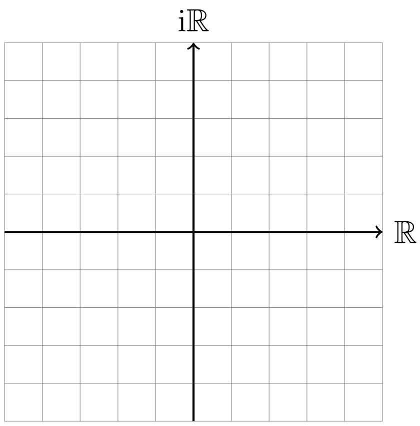
$$D_y = \det \begin{pmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{pmatrix} = a_1k_2 - k_1a_2$$

$$\text{Koeffizienten:}\quad \begin{array}{lll} a_1 = 2 - 2\mathrm{i} & b_1 = 3\mathrm{i} & k_1 = 1 + 4\mathrm{i} \\ a_2 = 1 + 2\mathrm{i} & b_2 = -3 & k_2 = 2 + 2\mathrm{i} \end{array}$$

3.3 Die Kreisteilungsgleichung

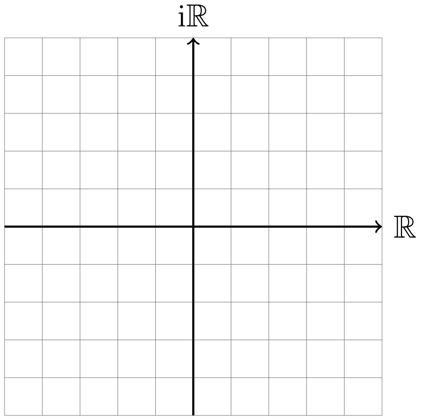
Beispiel 3.3

$z^2 = 4\mathrm{i}$



Beispiel 3.4

$z^2 = -2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$



Das Lösungsverfahren lässt sich auf Gleichungen der Form $z^n = c$ $(n \in \mathbb{N})$ verallgemeinern:

Satz: Die Gleichung

$$z^n = c = r \cdot \operatorname{cis} \varphi, \qquad (n \in \mathbb{N},\, c \in \mathbb{C})$$

hat n verschiedene Lösungen in $\mathbb{C}$

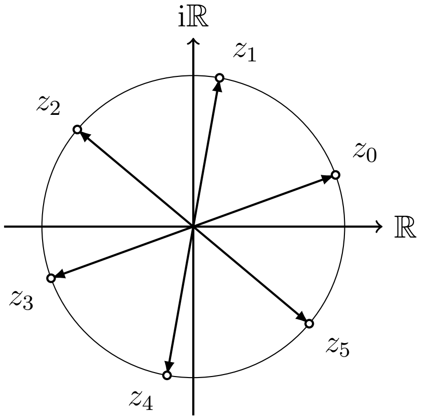
$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{360^\circ}{n}\right) \qquad k = 0,\, 1,\, 2\, \ldots,\, n-1$$

Beweis

Wir setzen die Lösung(en) in die Gleichung ein und rechnen mit der Formel von de Moivre:

Beispiel 3.5

$z^6 = -32 + 32\sqrt{3}\,\mathrm{i}$



Aus diesem Grund wird $z^n = c$ *Kreisteilungsgleichung* genannt.

3.4 Quadratische Gleichungen

Beispiel 4.4

$(1+\mathrm{i})z^2 - (6+2\mathrm{i})z + 9 + 13\mathrm{i} = 0$

Lösung mit Ansatz $z = x + \mathrm{i}\, y$:

3.5 Die algebraische Gleichung dritten Grades

Die quadratische Gleichung und deren Lösung sind schon seit etwa 2000 v. Chr. bekannt.

Auch kubische Gleichungen traten in der altgriechischen, der indischen und der arabischen Mathematik auf. Diese Gleichungen konnten dank Heron von Alexandria (ca. 100 v. Chr.) näherungsweise gelöst werden, indem er alte babylonische und ägyptische Näherungsverfahren zum Wurzelziehen anwendete.

Die Auflösung der allgemeinen Gleichungen dritten Grades wurden jedoch erst in der Zeit der Renaissance unabhängig von Scipione del Ferro (um 1465–1526) und von Niccolo Tartaglia (um 1500–1557) gefunden. Die Resultate von del Ferro blieben unveröffentlicht. Tartaglia verriet – unter der Bedingung der Geheimhaltung – seine Lösungsformel dem venezianischen Professor Geronimo Cardano (1501–1576), der jedoch sein Versprechen brach und die Formel unter seinem eigenen Namen veröffentlichte.

Die Gleichung

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (1)$$

mit $a \neq 0$ wird *allgemeine Form* der kubischen Gleichung genannt. Die Division durch a führt zur *normierten Form*

$$x^3 + rx^2 + sx + t = 0 \quad (2)$$

mit $r = b/a$, $s = c/a$ und $t = d/a$.

Substitution $x = y - r/3$:

$$x^3 = \left(y - \frac{r}{3}\right)^3 = \cdots = y^3 - ry^2 + \frac{r^2}{3}y - \frac{r^3}{27}$$

$$x^2 = \left(y - \frac{r}{3}\right)^2 = y^2 - \frac{2r}{3}y + \frac{r^2}{9}$$

$$x = y - \frac{r}{3}$$

Setzt man diese Terme in die Gleichung $x^3 + rx^2 + sx + t = 0$ ein, erhält man:

$$\begin{aligned} y^3 - ry^2 + \frac{r^2}{3}y - \frac{r^3}{27} + r\left(y^2 - \frac{2r}{3}y + \frac{r^2}{9}\right) + s\left(y - \frac{r}{3}\right) + t &= 0 \\ y^3 - ry^2 + \frac{r^2}{3}y - \frac{r^3}{27} + ry^2 - \frac{2r^2}{3}y + \frac{r^3}{9} + sy - \frac{rs}{3} + t &= 0 \\ y^3 + \left(s - \frac{r^2}{3}\right)y + \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t &= 0 \end{aligned}$$

Aus $p = s - \dfrac{r^2}{3}$ und $q = \dfrac{2r^3}{27} - \dfrac{rs}{3} + t = 0$ folgt die *reduzierte Form*:

$$y^3 + py + q = 0 \qquad (3)$$

Sind y_1, y_2 und y_3 Lösungen von (3), so sind

$x_1 = y_1 - r/3$

$x_2 = y_2 - r/3$

$x_3 = y_3 - r/3$

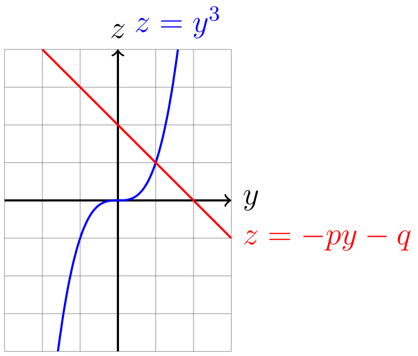
Lösungen von (2).

Löst man (3) nach y^3 auf, so erhält man

$$y^3 = -py - q \qquad (4)$$

Bemerkung

Gleichung (4) eignet sich auch unter anderem dazu, eine graphische Näherungslösung von (3) zu bestimmen:



Wir suchen die Lösungen für $y^3 = -py - q$

Für zwei beliebige Zahlen u und v gilt:

$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$
$(u+v)^3 = 3uv(u+v) + u^3 + v^3$

Ersetze $u+v$ durch y:

$y^3 = 3uvy + u^3 + v^3$

Ein Koeffizientenvergleich mit $y^3 = -py - q$ zeigt, dass $y = u + v$ eine Lösung von (4) ist, wenn die Zahlen u und v folgende Gleichungen erfüllen:

$$3uv = -p \qquad (5)$$
$$u^3 + v^3 = -q \qquad (6)$$

Exkurs: Der Satz von Vieta

Der Satz von Vieta beschreibt die Beziehungen der Lösungen einer algebraischen Gleichung n-ten Grades und ihren Koeffizienten.

Für die quadratischen Gleichung ($n = 2$) gilt:

$x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2)$
$x^2 + a_1x + a_0 = x^2 - x_1 - x_2 + x_1x_2$
$x^2 + a_1x + a_0 = x^2 - (x_1 + x_2) + x_1x_2$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt:

$a_1 = -(x_1 + x_2)$
$a_0 = x_1x_2$

Nun löst man Gleichung (5) nach uv auf

$$uv = -\frac{p}{3} \qquad (5.1)$$

und potenziert die neue Gleichung mit 3:

$$u^3v^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3 \qquad (5.2)$$

Nach dem Satz von Vieta sind u^3 und v^3 Lösungen der Gleichung

$$z^2 + qz - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

wobei

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}, \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad (7)$$

oder

$$u^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}, \quad v^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad (8)$$

Aus Symmetriegründen genügt es, nur eines der Lösungspaare – beispielsweise (7) – weiter zu untersuchen.

Ist u_1 eine Lösung der Gleichung

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

und sind

$$\tau = \operatorname{cis} 120^\circ = \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tau^2 = \operatorname{cis} 240^\circ = \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

die komplexen Zahlen, welche die Drehung um 120° bzw. 240° darstellen, so sind $u_2 = u_1\tau$ und $u_3 = u_1\tau^2$ die anderen beiden Lösungen.

Analog: Ist v_1 eine Lösung der Gleichung

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

so sind $v_2 = v_1\tau$ und $v_3 = v_1\tau^2$ die anderen beiden Lösungen.

Damit kommen als Lösungen für (u, v) zunächst 9 Kandidaten in Frage:

$$\begin{array}{lll} (u_1, v_1) & (u_1\tau, v_1) & (u_1\tau^2, v_1) \\ (u_1, v_1\tau) & (u_1\tau, v_1\tau) & (u_1\tau^2, v_1\tau) \\ (u_1, v_1\tau^2) & (u_1\tau, v_1\tau^2) & (u_1\tau^2, v_1\tau^2) \end{array}$$

Da nach Konstruktion jedes Lösungspaar (u, v) die Gleichungen in (7) erfüllt, gilt auch

$$u^3 + v^3 = \cdots = -q$$

und

$$u^3v^3 = \cdots = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right] = -\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

wie man leicht nachrechnet.

Damit erfüllen alle Kandidaten die Gleichungen (6) und (5.2).

Welche Kandidaten erfüllen auch die Gleichung $3uv = -p$?

Zu einer beliebigen Lösung u_1 von

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

bestimmen wir v_1, so dass $3u_1v_1 = -p$ ist.

Dann gilt:

$$v_1 = -\frac{p}{3u_1}$$

und

$$v_1^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{u_1^3} = -\left(\frac{p}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$= \frac{-\left(\frac{p}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)}{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)}$$

$$= \frac{-\left(\frac{p}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)}{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right]} = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Also ist v_1 eine Lösung von

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

und (u_1, v_1) eine Lösung von (5).

Wegen

$3u_1\tau^i v_1\tau^j = 3u_1v_1\tau^{i+j} = -p \in \mathbb{R}$

muss $\tau^{i+j} = 1$ gelten und daher erfüllen nur die drei Paare

(u_1, u_2), $(u_1\tau, u_2\tau^2)$ und $(u_1\tau^2, u_2\tau)$

die Gleichungen (5) und (6).

Die drei Zahlen

$$y_1 = u_1 + v_1$$
$$y_2 = u_1\tau + v_1\tau^2$$
$$y_3 = u_1\tau^2 + v_1\tau$$

Sind daher Lösungen der Gleichung (2).

Da eine Polynomgleichung dritten Grades nicht mehr als drei Lösungen besitzt, wurden alle Lösungen gefunden.

Es soll nun noch geklärt werden, wann relle Lösungen und wann relle und komplexe Lösungen auftreten.

Dazu betrachen wir den Term

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

der in den (Teil-)Lösungen

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$
$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

auftritt und die Struktur der Lösungen definiert. Aus diesem Grund wird D ebenfalls *Diskriminante* genannt.

1. Fall $D > 0$

Aus $D > 0$ folgt, dass

$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{D} \quad \text{und} \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{D}$

rell sind. Damit sind aber auch

$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} \quad \text{und} \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$

reell.

$$y_1 = u + v$$

$$\begin{aligned} y_2 &= u\tau + v\tau^2 \\ &= u\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + v\left(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -\frac{u+v}{2} + \mathrm{i}\,\frac{u-v}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= u\tau^2 + v\tau \\ &= u\left(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + v\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -\frac{u+v}{2} - \mathrm{i}\,\frac{u-v}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

2. Fall $D = 0$

Aus $D = 0$ folgt

$u = v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$

und als Spezialfälle der oben hergeleiteten Lösungen erhält man:

$$y_1 = u + v = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}} = -\sqrt[3]{4q}$$

$$y_2 = -\frac{u+v}{2} + \mathrm{i}\,\frac{u-v}{2}\sqrt{3} = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$$

$$y_3 = -\frac{u+v}{2} - \mathrm{i}\,\frac{u-v}{2}\sqrt{3} = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$$

3. Fall $D < 0$ **(Casus irreducibilis)**

Aus $D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0$ folgt $p < 0$.

Es gilt $\sqrt{D} = \sqrt{(-1)^2 D} = \mathrm{i}\sqrt{-D}$ mit $\sqrt{-D} \in \mathbb{R}$

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \mathrm{i}\sqrt{-D} = \varrho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = \varrho\,\mathrm{cis}(\varphi)$$
$$v^3 = -\frac{q}{2} - \mathrm{i}\sqrt{-D} = \varrho(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi) = \varrho\,\mathrm{cis}(-\varphi)$$

wobei

$$\varrho = |u^3| = |v^3| = \sqrt{\frac{q}{2}^2 + (-D)} = \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3} = -\sqrt{\frac{p^3}{27}} \quad \text{da } p < 0$$

Ein Vergleich der Real und Imaginärteile in den Gleichungen

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \mathrm{i}\sqrt{-D} = \varrho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$$
$$v^3 = -\frac{q}{2} - \mathrm{i}\sqrt{-D} = \varrho(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi)$$

führt zu:

$$-\frac{q}{2} = \varrho\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = -\frac{q}{2\varrho} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos\left(-\frac{q}{2\varrho}\right)$$

oder zu:

$$\sqrt{-D} = \varrho\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{-D}}{2\varrho} \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\arcsin\frac{\sqrt{-D}}{2\varrho}$$

Mit der Formel von de Moivre erhalten wir

$$u_1 = \sqrt[3]{\varrho}\cdot\mathrm{cis}\,\frac{\varphi}{3} \quad \text{und} \quad v_1 = \sqrt[3]{\varrho}\cdot\mathrm{cis}\,\frac{-\varphi}{3}$$

und damit

$$\begin{aligned}
y_1 &= u_1 + v_1 = \sqrt[3]{\varrho}\cdot\mathrm{cis}\,\frac{\varphi}{3} + \sqrt[3]{\varrho}\cdot\mathrm{cis}\,\frac{-\varphi}{3}\\
&= \sqrt[3]{\varrho}\cdot\left[\cos\frac{\varphi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{3} + \cos\frac{-\varphi}{3} - \mathrm{i}\sin\frac{-\varphi}{3}\right]\\
&= 2\sqrt[3]{\varrho}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}\\
y_2 &= u_1\tau + v_1\tau^2\\
&= \sqrt[3]{\varrho}\left[\mathrm{cis}\,\frac{\varphi}{3}\cdot\mathrm{cis}\,\frac{2\pi}{3} + \mathrm{cis}\,\frac{-\varphi}{3}\cdot\mathrm{cis}\,\frac{4\pi}{3}\right]\\
&= \sqrt[3]{\varrho}\left[\mathrm{cis}\,\frac{\varphi+2\pi}{3} + \mathrm{cis}\,\frac{-\varphi+4\pi}{3}\right]\\
&= \sqrt[3]{\varrho}\left[\mathrm{cis}\,\frac{\varphi+2\pi}{3} + \mathrm{cis}\left(\frac{-\varphi+4\pi}{3} - 2\pi\right)\right]\\
&= \sqrt[3]{\varrho}\left[\mathrm{cis}\,\frac{\varphi+2\pi}{3} + \mathrm{cis}\left(-\frac{\varphi+2\pi}{3}\right)\right]\\
&= \sqrt[3]{\varrho}\left[\cos\frac{\varphi+2\pi}{3} + \mathrm{i}\,\sin\frac{\varphi+2\pi}{3} + \cos\frac{\varphi+2\pi}{3} - \mathrm{i}\,\sin\frac{\varphi+2\pi}{3}\right]\\
&= 2\sqrt[3]{\varrho}\cos\frac{\varphi+2\pi}{3}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y_3 &= u_1\tau^2 + v_1\tau \\
&= \sqrt[3]{\varrho}\left[\operatorname{cis}\frac{\varphi}{3}\cdot\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3} + \operatorname{cis}\frac{-\varphi}{3}\cdot\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}\right] \\
&= \sqrt[3]{\varrho}\left[\operatorname{cis}\frac{\varphi+4\pi}{3} + \operatorname{cis}\frac{-\varphi+2\pi}{3}\right] \\
&= \sqrt[3]{\varrho}\left[\operatorname{cis}\frac{\varphi+4\pi}{3} + \operatorname{cis}\left(\frac{-\varphi+2\pi}{3} - 2\pi\right)\right] \\
&= \sqrt[3]{\varrho}\left[\operatorname{cis}\frac{\varphi+4\pi}{3} + \operatorname{cis}\left(-\frac{\varphi+4\pi}{3}\right)\right] \\
&= \sqrt[3]{\varrho}\left[\cos\frac{\varphi+4\pi}{3} + \mathrm{i}\,\sin\frac{\varphi+4\pi}{3} + \cos\frac{\varphi+4\pi}{3} - \mathrm{i}\,\sin\frac{\varphi+4\pi}{3}\right] \\
&= 2\sqrt[3]{\varrho}\cos\frac{\varphi+4\pi}{3}
\end{aligned}
$$

Achtung

Nicht vergessen die Rücksubstitution

$$x_i = y_i - \frac{r}{3} \quad (i = 1,\, 2,\, 3)$$

durchzuführen.

3.6 Die algebraische Gleichung vierten Grades

Die formelmässige Auflösung der allgemeinen Gleichung 4. Grades wurde von *Ludovico Ferrari* (1522–1565) – einem Schüler und Mitarbeiter von Geronimo Cardano gefunden.

Hier soll die Auflösung nach René Descartes (1596–1650) gezeigt werden.

Zuerst wird die Gleichung 4. Grades auf Normalform

$$x^4 + sx^3 + tx^2 + ux + v = 0$$

und anschliessend mit der Substitution $x = y - s/4$ auf die reduzierte Form

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

gebracht, wobei

$$
\begin{aligned}
p &= t - \frac{3}{8}s^2 + t \\
q &= \frac{1}{8}s^3 - \frac{1}{2}ts + u \\
r &= -\frac{3}{256}s^4 + \frac{1}{16}ts^2 - \frac{1}{4}us + v
\end{aligned}
$$

Dann wählt man den Ansatz für die Zerlegung der reduzierten Form in ein Produkt aus zwei quadratischen Faktoren:

$$
\begin{aligned}
x^4 + px^2 + qx + r &= (x^2 + ax + b)(x^2 - ax + c) \\
&= x^4 + (-a^2 + b - c)x^2 + a(c - b)x + bc
\end{aligned}
$$

Die Zerlegung ist so gewählt, dass beim Ausmultiplizieren keine dritten Potenzen von x entstehen. Ein Vergleich der entsprechenden Koeffizienten links und rechts des Gleichheitszeichens ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} b + c - a^2 &= p \\ a(c - b) &= q \\ bc &= r \end{aligned}$$

Zunächst löst man die oberste Gleichung nach b und die mittlere nach c auf:

$b = p + a^2 - c$

$c = \dfrac{q}{a} + b$

Dann setzt man gegenseitig ein:

$b = p + a^2 - \left(\dfrac{q}{a} + b\right)$

$c = \dfrac{q}{a} + p + a^2 - c$

$2b = a^2 + p - \dfrac{q}{a}$

$2c = a^2 + p + \dfrac{q}{a}$

Nun setzen wir diese Terme in die mit 4 multiplizierte unterste Gleichung $4bc = 4r$ ein:

$$\begin{aligned} \left(a^2 + p - \frac{q}{a}\right)\left(a^2 + p + \frac{q}{a}\right) &= 4r \\ a^4 + 2a^2p + p^2 - \frac{q^2}{a^2} &= 4r \\ a^6 + 2a^4 + (p^2 - 4r)a^2 - q^2 &= 0 \\ w^3 + 2w^2 + (p^2 - 4r)w - q^2 &= 0 \end{aligned}$$

wobei a^2 durch w substituiert wurde.

Diese Gleichung dritten Grades wird *kubische Resolvente* genannt und besitzt mindestens eine reelle Lösung w_1, die zwischen $w = 0$ und $w = \infty$ liegt; also *positiv* ist.

Aus $a = \sqrt{w_1}$ lassen sich sich b und c und damit die beiden quadratischen Faktoren

$$(x^2 + ax + b)(x^2 - ax + c)$$

der Gleichung bestimmen. Diese Faktoren lassen sich jedoch mit der entsprechenden Lösungformel berechnen. Es gibt somit folgende Fälle:

- 4 reelle Lösungen
- 2 reelle und ein Paar konjugiert komplexer Lösungen
- 2 Paare konjugiert komplexer Lösungen

3.7 Die Sätze von Abel und Galois

Der Fundamentalsatz der Algebra macht nur eine Aussage über die Existenz von Lösungen einer algebraischen Gleichung n-ten Grades.

Wie diese Lösungen im Fall $n = 1, 2, 3,$ und 4 gefunden werden können, haben wir bereits gesehen.

Lange Zeit suchte man nach einer Lösungsformel für die algebraischen Gleichungen vom Grad $n \geq 4$. Die Hoffnung wurde daduch genährt, dass in speziellen Fällen wie zum Beispiel $ax^5 + b = 0$ oder $ax^5 + bx^4 + bx^3 = 0$ durchaus Lösungsformeln zu finden sind.

Zunächst konnte Nils Henrik Abel (1802–1829) beweisen, dass für die *allgemeine* algebraische Gleichung 5. Grades keine Lösungsformel gefunden werden kann.

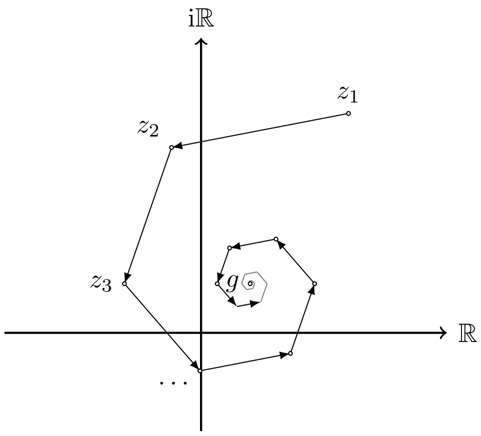
Das war noch nicht genug.

Evariste Galois (1811–1832) erkannte, dass jeder algebraischen Gleichung ein spezielle Gruppe zugeordnet werden kann. Die Struktur dieser Gruppe gibt Auskunft darüber, wie die Lösungen der zugehörigen Gleichung gefunden werden können. Er bewies zudem, dass für algebraische Gleichungen vom Grad grösser als 4 die Struktur der zugehörigen Gruppen nicht mehr in jedem Fall eine Auflösung mit algebraischen Mitteln (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Divsion und Wurzeln) zulassen.

4 Komplexe Folgen

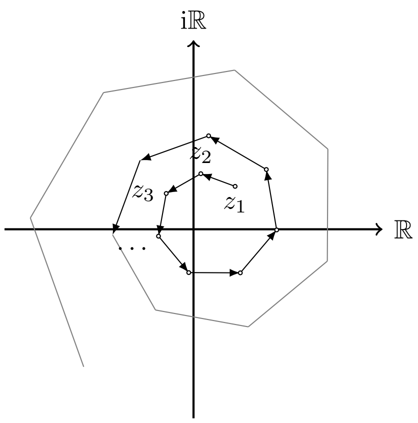
Eine komplexen Zahlenfolge (z_n), $(n \in \mathbb{N},\ z_n \in \mathbb{C})$ kann als Folge von Punkten in der Gausschen Zahlenebene gedeutet werden. Wir unterscheiden folgende Situationen:

Konvergente Folge



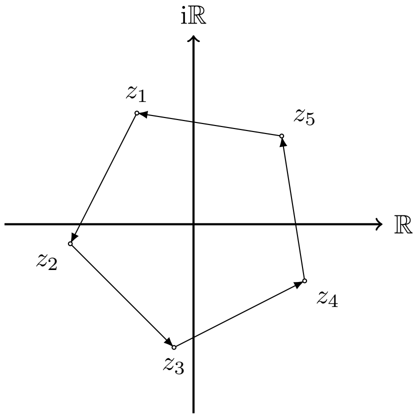
Die Punktfolge konvergiert gegen den Grenzpunkt g.

Divergente Folge

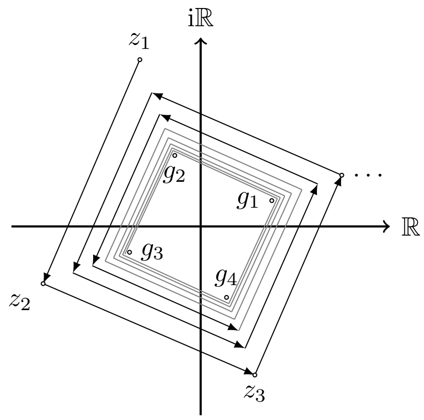


Die Punktfolge divergiert.

Zyklus



Die Punktfolge ist ein Zyklus mit $k = 5$ periodischen Punkten.



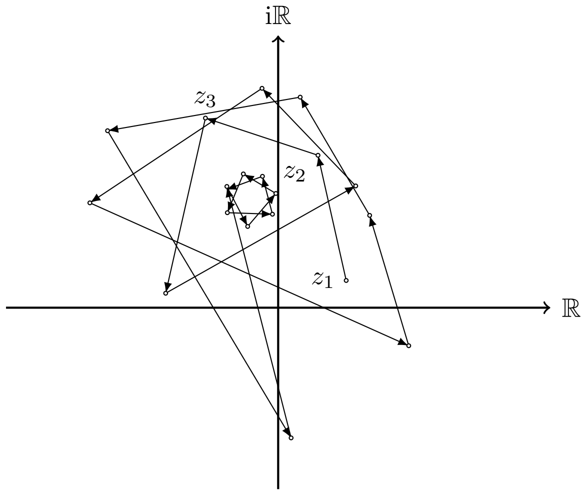
Die Punktfolge *strebt* gegen einen Zyklus mit $k = 4$ periodischen Punkten.

Iteration einer Funktion $f\colon z \to f(z)$

Ist $z_1 \in \mathbb{C}$ und $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Funktion, so wird die Folge

$$z_1,\ z_2 = f(z_1),\ z_3 = f(z_2),\ z_4 = f(z_3),\ \ldots$$

Bahn von z_1 der Funktion f genannt.



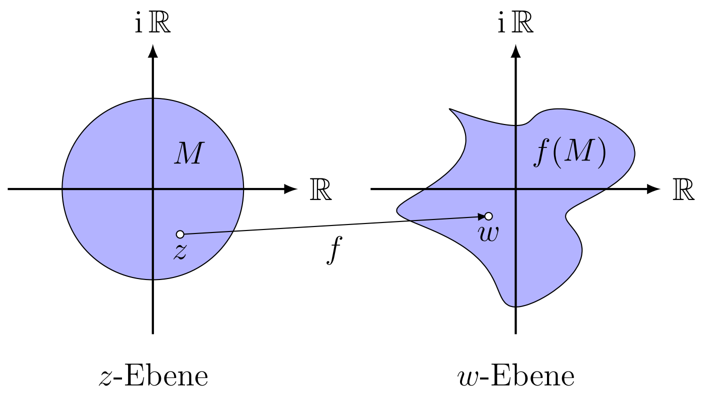
Bahn von $z_1 = 0.6 - 0.4\,\mathrm{i}$ der Funktion $f(z) = z^2 + 0.1 + 0.6\,\mathrm{i}$

5 Komplexe Funktionen

5.1 Funktionen in $\mathbb{C}$

Eine komplexe Funktion f ordnet jeder Zahl z aus einer Definitionsmenge $D \subset \mathbb{C}$ genau eine komplexe Zahl $w \in \mathbb{C}$ zu. Der Funktion entspricht in der Zahlenebene eine Abbildung, die jedem Originalpunkt $P(z)$ den Bildpunkt $P'(w)$ zuordnet.

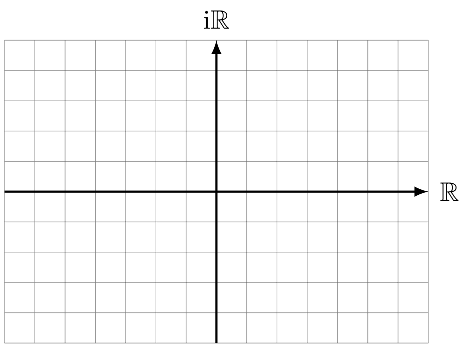
Wir benützen zwei Exemplare der Zahlenebene, die z-Ebene und die w-Ebene. Häufig identifizieren wir die beiden Ebenen, wir zeichnen Original- und Bildpunkte in dieselbe Zahlenebene ein.



5.2 Lineare Funktion

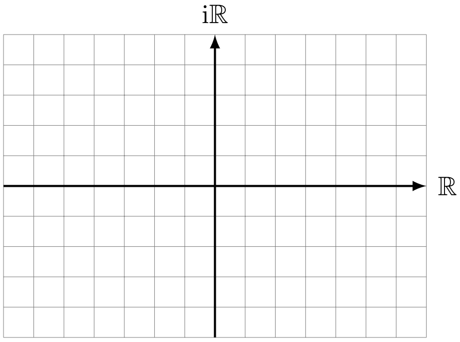
Aufgabe 5.1

Gegeben: $f(z) = z + 5 + 3\mathrm{i}$ und die Punkte $A(-3-\mathrm{i})$, $B(-1-\mathrm{i})$, und $C(-1+\mathrm{i})$. Zeichne das Original- und das Bilddreieck.



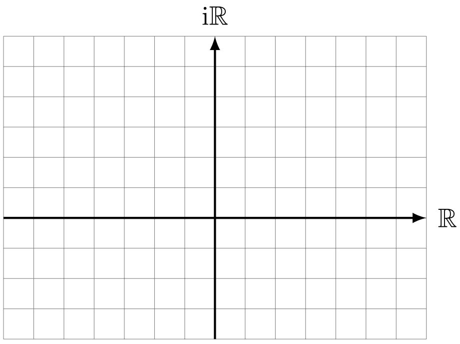
Aufgabe 5.2

Gegeben: $f(z) = -2z$ und die Punkte $A(1 + \mathrm{i})$, $B(3 + \mathrm{i})$, und $C(3 + 2\mathrm{i})$. Zeichne das Original- und das Bilddreieck.



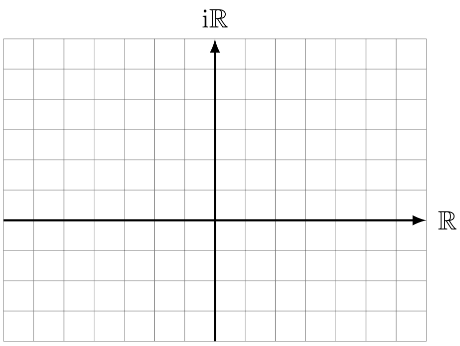
Aufgabe 5.3

Gegeben: $f(z) = \mathrm{i}\,z$ sowie $A(1 + \mathrm{i})$, $B(4 + \mathrm{i})$, und $C(4 + 3\mathrm{i})$. Zeichne das Original- und das Bilddreieck.



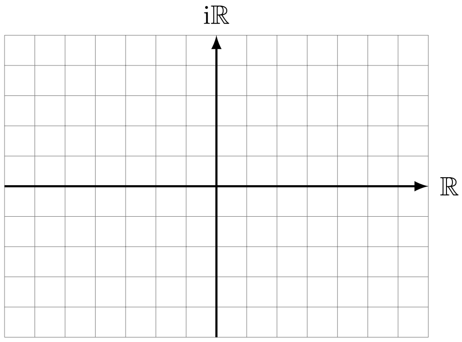
Aufgabe 5.4

Gegeben: $f(z) = -2\mathrm{i}z$ sowie $A(-2 + \mathrm{i})$, $B(\mathrm{i})$, und $C(2\mathrm{i})$. Zeichne das Original- und das Bilddreieck.



Aufgabe 5.5

Gegeben: $f(z) = \overline{z}$ sowie $A(1+\mathrm{i})$, $B(4+\mathrm{i})$, und $C(3+3\mathrm{i})$. Zeichne das Original- und das Bilddreieck.



Die Funktion

$$w = f(z) = az + b$$

mit $a,\ b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, die einer komplexen Zahl z die komplexe Zahl w zuordnet, nennt man eine *lineare Funktion*.

Die Funktion $f(z) = az + b$ beschreibt eine Drehstreckung am Zentrum $Z(0)$ mit Faktor $|a|$ und Winkel α sowie einer anschliessenden Translation um b.

Dies ist eine *gleichsinnige Ähnlichkeitsabbildung*.

Im Falle von $f(z) = a\overline{z} + b$ ist der oben beschriebenen Abbildung noch eine Geradenspiegelung an der reellen Achse vorgeschaltet und entspricht somit einer *ungleichsinnige Ähnlichkeitsabbildung*.

Spezialfälle

- $a = 1$:

- $|a| = 1$, $b = 0$:

- $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b = 0$:

Fixpunkte von f

Zu jeder komplexen linearen Funktion $f(z) = az + b$ mit $a \neq 1$ lässt sich ein Fixpunkt z_0, d. h. ein Punkt mit der Eigenschaft $f(z_0) = z_0$ finden.

Aufgabe 5.6

Gesucht: Fixpunkt z_0 von $f(z) = (1 + \mathrm{i})z + 3 - 2\mathrm{i}$.

5.3 Punktmengen in der Zahlenebene

Geraden

Die folgende Darstellungen von Geraden in $\mathbb{R}^2$ sollten bereits bekannt sein:

-
-
-

Aus der letzten Darstellung erhält man die *Parameterdarstellung* für Geraden in $\mathbb{C}$:

Aus der Koordinatenform lässt sich eine weitere Beschreibung von Geraden in $\mathbb{C}$ herleiten:

Daraus folgt: Die Gleichung

stellt in der komplexen Zahlenebene eine Gerade dar.

Spezialfälle

- Geraden parallel zur reellen Achse:

- Geraden parallel zur imaginären Achse:

- Ursprungsgeraden:

Aufgabe 5.7

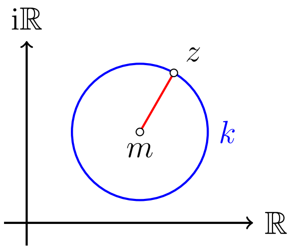
Stelle die Gerade $g\colon y = -2x + 3$ in der komplexen Form $\overline{b}z + b\overline{z} + c = 0$ dar.

Aufgabe 5.8

Stelle $g\colon (1+\mathrm{i})z + (1-\mathrm{i})\overline{z} + 1 = 0$ in der reellen Koordinatenform $Ax + By + C = 0$ dar.

5.4 Kreise

Die Betragsform der Kreisgleichung



Ein *Kreis* mit dem Mittelpunkt $m \in \mathbb{C}$ und dem Radius $r \in \mathbb{R}^+$ hat die Gleichung

Aus der Betragsform der Kreisgleichung folgt:

Die betragsfreie Form der Kreisgleichung

Aus $|m-z| = r$ erhält man mit $c = m\overline{m} - r^2 \in \mathbb{R}$ die *betragsfreie Form* der Kreisgleichung:

Aufgabe 5.9

Stelle den Kreis k mit Mittelpunkt $m = \mathrm{i}$ und Radius $r = 4$ in der Betragsform und in der betragsfreien Form dar.

Aufgabe 5.10

Welche Bedingung muss für $c \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{C}$ erfüllt sein, damit die betragsfreie Form der Kreisgleichung tatsächlich einen Kreis beschreibt?

Aufgabe 5.11

Welches ist der Mittelpunkt und der Radius des Kreises
$k\colon z\overline{z} + \mathrm{i}z - \mathrm{i}\overline{z} - 1 = 0$?

Die *Parameterdarstellung* für einen Kreis kann auf die komplexe Zahlenebene übertragen werden:

5.5 Abbilden von Kurven

Eine *Kurve* ist die Menge K aller Punkte $z \in \mathbb{C}$, die eine Gleichung $G(z) = 0$ erfüllen.

Beispiele:

- $\underbrace{(3-4\mathrm{i})z + (3+4\mathrm{i})\overline{z} + 4}_{G(z)} = 0$
- $\underbrace{z\overline{z} - (3-4\mathrm{i})z - (3+4\mathrm{i})\overline{z} + 21}_{G(z)} = 0$

Satz

Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion, K eine Kurve und K' ihre Bildkurve. Dann gilt für $w = f(z)$:

$w \in K' \quad \Leftrightarrow \quad z \in K \quad \Leftrightarrow \quad G(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad G(f^{-1}(w)) = 0$

Man erhält die Gleichung von K', indem man in der Gleichung von K die Variable z durch $f^{-1}(w)$ ersetzt.

Aufgabe 5.12

Kurve: $K\colon |z| = 1$; Funktion: $f(z) = 2z + \mathrm{i}$

Aufgabe 5.13

Kurve: $K\colon |z-2| = 3$; Funktion: $f(z) = 1/\overline{z}$

Aufgabe 5.14

Kurve: $K\colon (1+\mathrm{i})z + (1-\mathrm{i})\overline{z} = 0$; Funktion: $f(z) = 1/\overline{z}$

Aufgabe 5.15

Kurve: $K\colon (4+3\mathrm{i})z + (4-3\mathrm{i})\overline{z} + 12 = 0$; Funktion: $f(z) = 1/\overline{z}$

5.6 Inversion (Spiegelung) am Einheitskreis

Gegeben ist die Funktion $f(z) = w = 1/\overline{z}$

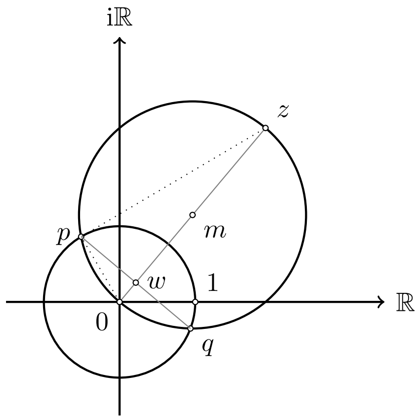
Ist $z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, so gilt:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{\overline{r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}} \\
&= \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}} = \frac{1}{r} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = w
\end{aligned}
$$

Also ist $|w| = \dfrac{1}{|z|}$ und $\arg(w) = \arg(z)$

Geometrische Deutung

$f(z) = w = 1/\overline{z}$ stellt eine Spiegelung von z am Einheitskreis dar.



Konstruktion (für $|z| > 1$)

1. Kreis$(M = 0, r = 1) \to k_E$ (Einheitskreis)
2. Mittelpunkt$(0, z) \to m$

3. Kreis($M = m, r = |z|/2$) $\to k_T$ (Thaleskreis über $0z$)
4. $k_E \cap k_T \to \{p, q\}$
5. $pq \cap 0z \to w$

Berechnung

Das Dreieck Ozp ist rechtwinklig. Aus dem Kathethensatz folgt:

$$|Op|^2 = |Ow| \cdot |Oz|$$
$$1^2 = |w| \cdot |z|$$
$$|w| = 1/|z|$$

Aufgabe 5.16

Berechne $f(f(z))$.

Aufgabe 5.17

Welches ist das Bild eines Kreises mit dem Mittelpunkt M im Ursprung und dem Radius r?

Aufgabe 5.18

Welches ist das Bild eines Strahls, der vom Ursprung ausgeht?

Aufgabe 5.19

Welches sind die Fixpunkte dieser Abbildung?

Aufgabe 5.20

Wohin werden die Punkte innerhalb des Einheitskreises abgebildet? Wohin die Punkte ausserhalb des Einheitskreises?

5.7 Die Spiegelung am Einheitskreis als kreistreue Abbildung

Zusammenfassung

- Kreise, die nicht durch den Ursprung gehen, werden auf Kreise abgebildet, die nicht durch den Ursprung gehen.

- Geraden durch den Ursprung werden auf sich selbst abgebildet (Fixgeraden aber keine Fixpunktgeraden).

- Geraden, die nicht durch den Ursprung gehen, werden auf Kreise abgebildet, die durch den Ursprung gehen.

- Wegen $f(f(z)) = z$, d.h. wegen $f^{-1}(z) = f(z)$, werden Kreise, die durch den Ursprung gehen, auf Geraden abgebildet, die nicht durch den Ursprung gehen.

Damit man sich diese Eigenschaften der Kreisspiegelung einfacher merken kann, empfiehlt es sich, die Abbildung $f(z) = 1/\overline{z}$ auch für $z = 0$ zu definieren. Dazu fügt man der Gaussschen Zahlenebene einen *unendlich fernen Punkt* $w = \infty$ hinzu, der das Bild von $z = 0$ sein soll.

Umgekehrt muss dann $f(\infty) = 0$ gelten. Die Abbildung $f(z) = 1/\overline{z}$ ist dann eine Abbildung *der erweiterten Zahlenebene* auf sich selbst.

Die Ergänzung hat zur Folge, dass das Bild einer Geraden, die durch den Ursprung geht, ein voller durch den Ursprung gehender Kreis ist. Fasst man Geraden als Kreise auf, die durch den Fernpunkt ∞ gehen, so kann man die Eigenschaften wie folgt zusammenfassen:

Satz

Die Spiegelung am Einheitskreis $f(z) = 1/\overline{z}$ ist *kreistreu*, d. h. sie bildet jeden Kreis k der erweiterten Zahlenebene wieder auf einen Kreis k' ab. Enthält k den Punkt $z = 0$, so geht k' durch den Punkt $w = \infty$ und umgekehrt.

Aufgabe 5.21

Bestimme das Bild k' der Kurve $k\colon z\overline{z} + 4z + 4\overline{z} = 0$ unter der Funktion $f(z) = 1/\overline{z}$.

Aufgabe 5.22

Bestimme das Bild k' der Kurve $k\colon z + \overline{z} - 8 = 0$ unter der Funktion $f(z) = 1/\overline{z}$.

5.8 Formelsammlung komplexe Funktionen

Gerade

Koordinatenform:	$Ax + By + C = 0$ mit A, B, $C \in \mathbb{R}$
komplexe Form:	$\overline{b}z + b\overline{z} + c = 0$ mit $b = A + B\mathrm{i}$ und $c = 2C$
Parameterform:	$z(t) = a + t \cdot v$ mit $t \in \mathbb{R}$ und a, $v \in \mathbb{C}$

Kreis

Betragsform:	$\lvert z - m \rvert = r$ mit $z, m \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}^+$
betragsfreie Form:	$z\overline{z} - \overline{m}z - m\overline{z} + c = 0$ mit $c = m\overline{m} - r^2 \in \mathbb{R}$
Parameterform:	$z(\varphi) = m + r \cdot \operatorname{cis}\varphi$ mit $m \in \mathbb{C}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $r \in \mathbb{R}^+$

6 Der Fundamentalsatz der Algebra

Es sei

$$f_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

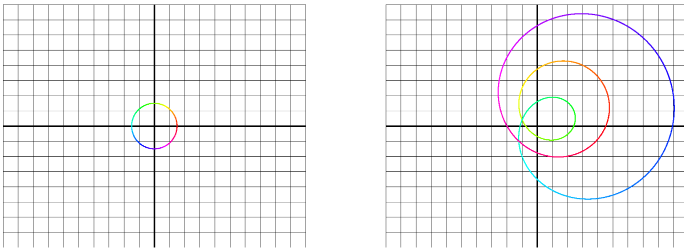
eine Polynomfunktion vom Grad n mit komplexen Koeffizienten a_0, a_1, $\ldots$, a_n, wobei $a_n \neq 0$.

Fundamentalsatz der Algebra: Die Gleichung $f_n(z) = 0$ besitzt mindestens eine Lösung z_0 in $\mathbb{C}$.

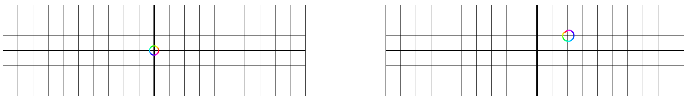
Begründung

$f_3(z) = z^3 - \mathrm{i}z^2 - (\frac{1}{2} - \mathrm{i})z + (2 + \mathrm{i})$

Das Bild eines hinreichend grossen Kreises mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt ist eine geschlossene Kurve, die den Nullpunkt in der Bildebene n-mal umschlingt.



Das Bild eines hinreichend kleinen Kreises mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt ist eine in der Nähe des Punktes $f_n(0) = a_0$ liegende Kurve, die den Nullpunkt der Bildebene nicht umschlingt.



Wenn also der Radius des Orginalkreises mit einem hinreichend grossen Wert beginnend gegen Null abnimmt, wird die Bildkure deformiert und es muss mindestens einmal die Situation eintreten, in der die Bildkurve durch den Nullpunkt geht. Für diese Situation gibt es einen auf dem Originalkreis liegenden Punkt z_0 der von $f_n(z)$ auf den Nullpunkt der Bildebene abgebildet wird.