Aufgabe 1

Translation um $3 + 4\mathrm{i}$

Aufgabe 2

Spiegelung *am Ursprung*

Aufgabe 3

Spiegelung *an der reellen Achse*

Aufgabe 4

Streckung mit dem Faktor -2 *am Ursprung*
oder:
Streckung *am Ursprung* mit Faktor 2 mit anschliessender Spiegelung *am Ursprung*

Aufgabe 5

Aufgabe 6

$f(z) = \sqrt{3}z + 2 + 5\mathrm{i}$

Aufgabe 7

$f(z) = -2\mathrm{i}z$

Aufgabe 8

$$
\begin{aligned}
z &= (2+\mathrm{i})z + 1 - 3\mathrm{i} \quad \text{[Fixpunktbedingung]}\\
z - (2+\mathrm{i})z &= 1 - 3\mathrm{i}\\
z\big[1-(2+\mathrm{i})\big]z &= 1 - 3\mathrm{i}\\
z(-1-\mathrm{i})z &= 1 - 3\mathrm{i}\\
z &= \frac{1-3\mathrm{i}}{-1-\mathrm{i}} \quad \text{[mit -1 erweitern]}\\
z &= \frac{-1+3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} \quad \text{[mit $1-\mathrm{i}$ erweitern]}\\
z &= \frac{(-1+3\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}\\
z &= \frac{-1+\mathrm{i}+3\mathrm{i}+3}{1+1}\\
z &= \frac{2+4\mathrm{i}}{2} = 1 + 2\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 9

$f(z) = (1+\mathrm{i})z$

Aufgabe 10 (geometrische Lösung)

Zuerst wird z um $-(2-\mathrm{i}) = -2+\mathrm{i}$ verschoben. Dann kann die Drehung wie gewohnt um den Ursprung erfolgen. Zum Schluss ist die Verschiebung durch Addition von $2-\mathrm{i}$ wieder rückgängig zu machen:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= (1+\mathrm{i})(z-2+\mathrm{i}) + 2 - \mathrm{i}\\
&= (1+\mathrm{i})z + (1+\mathrm{i})(-2+\mathrm{i}) + 2 - \mathrm{i}\\
&= (1+\mathrm{i})z - 2 + \mathrm{i} - 2\mathrm{i} - 1 + 2 - \mathrm{i}\\
&= (1+\mathrm{i})z - 1 - 2\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10 (algebraische Lösung)

Das Zentrum $z_0 = 2-\mathrm{i}$ der Drehstreckung ist der Fixpunkt der affinen Funktion. Ferner ist der Streckungsfaktor und der Drehwinkel in Form der komplexen Zahl $a = (1+\mathrm{i})$ bekannt, denn $|a| = \sqrt{2}$ und $\arg(a) = 45°$. Setzt man diese beiden Werte in die Fixpunktgleichung ein, kann man nach b auflösen.

$$
\begin{aligned}
z_0 &= az_0 + b\\
2-\mathrm{i} &= (1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i}) + b\\
b &= 2 - \mathrm{i} - (1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})\\
b &= 2 - \mathrm{i} - (2 - \mathrm{i} + 2\mathrm{i} + 1)\\
b &= -1 - 2\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

Insgesamt: $f(z) = az + b = (1+\mathrm{i})z - 1 - 2\mathrm{i}$

Aufgabe 11

$g\colon 4x - 3y + 1 = 0$

$A = 4,\ B = -3,\ C = 1$

$b = A + B\mathrm{i} = 4 - 3\mathrm{i},\ c = 2C = 2$

$g\colon (4 + 3\mathrm{i})z + (4 - 3\mathrm{i})\overline{z} + 2 = 0$

Aufgabe 12

$(-3 + 2\mathrm{i})z + (-3 - 2\mathrm{i})\overline{z} + 5 = 0$

$b = -3 - 2\mathrm{i} = A + B\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad A = -3$ und $B = -2$

$c = 5 = 2C \quad \Rightarrow \quad C = 2.5$

$g\colon -3x - 2y + 2.5 = 0 \quad \Rightarrow \quad g\colon 6x + 4y - 5 = 0$

Aufgabe 13

$|z - 3 - 2\mathrm{i}| = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad |z - (3 + 2\mathrm{i})| = \sqrt{3}$

$m = 3 + 2\mathrm{i},\ r = \sqrt{3}$

$c = m\overline{m} - r^2 = 3^2 + 2^2 - 3 = 10$

$k\colon z\overline{z} - (3 - 2\mathrm{i})z - (3 + 2\mathrm{i})\overline{z} + 10 = 0$

Aufgabe 14

$z\overline{z} - (3 + 5\mathrm{i})z - (3 - 5\mathrm{i})\overline{z} - 2 = 0$

$z\overline{z} - \overline{m}z - m\overline{z} + c = 0$

$m = 3 - 5\mathrm{i},\ c = -2$

$r = \sqrt{m \cdot \overline{m} - c} = \sqrt{3^2 + 5^2 - (-2)} = \sqrt{36} = 6$

$k\colon |z - (3 - 5\mathrm{i})| = 6$

Aufgabe 15

$f(z) = \mathrm{i}\overline{z} + 3$

Gleichung der Umkehrfunktion f^{-1}:

$$
\begin{aligned}
w &= \mathrm{i}\overline{z} + 3 \\
w - 3 &= \mathrm{i}\overline{z} \quad || \cdot (-\mathrm{i}) \\
-\mathrm{i}w + 3\mathrm{i} &= \overline{z} \\
\overline{z} &= -\mathrm{i}w + 3\mathrm{i} \quad || \text{ konjugieren} \\
z &= \overline{-\mathrm{i}w + 3\mathrm{i}} \\
z &= \mathrm{i}\overline{w} - 3\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

$z = \mathrm{i}\overline{w} - 3\mathrm{i}$ und $\overline{z} = -\mathrm{i}w + 3\mathrm{i}$ in g einsetzen:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}(\mathrm{i}\overline{w} - 3\mathrm{i}) - \mathrm{i}(-\mathrm{i}w + 3\mathrm{i}) + 2 &= 0 \\ -\overline{w} + 3 - w - 3 + 2 &= 0 \\ g'\colon -w - \overline{w} + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 16

Da eine affinen („linearen“) Abbildung einen Kreis auf einen Kreis abbildet genügt es, das Bild m' des Mittelpunkts m und den Radius r' des gestreckten Kreises zu bestimmen.

$m = 3 \quad \Rightarrow \quad m' = f(m) = (1+\mathrm{i})3 + \mathrm{i} = 3 + 3\mathrm{i} + \mathrm{i} = 3 + 4\mathrm{i}$

Streckungsfaktor: $|a| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$r = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad r' = |a| \cdot r = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$

$k'\colon |w - (3 + 4\mathrm{i})| = 2$

Wer sich nur ein „Rezept“ merken will, soll ...

(a) die Kreisgleichung in die komplexe Form umwandeln,
(b) die Umkehrfunktion $z = f^{-1}(w)$ bestimmen,
(c) $z = f^{-1}(w)$ in (a) einsetzen,
(d) die Bildgleichung (c) vereinfachen.

Aufgabe 17

Umkehrabbildung: $w = 1/\overline{z} \quad \Rightarrow \quad z = 1/\overline{w}$, $\overline{z} = 1/w$

$$\begin{aligned} (1+\mathrm{i})z + (1-\mathrm{i})\overline{z} &= 0 \\ (1+\mathrm{i})\frac{1}{\overline{w}} + (1-\mathrm{i})\frac{1}{w} &= 0 \quad || \cdot w\overline{w} \\ K'\colon (1+\mathrm{i})w + (1-\mathrm{i})\overline{w} &= 0 \end{aligned}$$

geometrische Deutung: Eine Gerade durch den Ursprung (Kreis durch ∞) wird auf sich selbst abgebildet.

Aufgabe 18

Umkehrabbildung: $w = 1/\overline{z} \quad \Rightarrow \quad z = 1/\overline{w}$, $\overline{z} = 1/w$

$$\begin{aligned} (1+\mathrm{i})z + (1-\mathrm{i})\overline{z} + 1 &= 0 \\ (1+\mathrm{i})\frac{1}{\overline{w}} + (1-\mathrm{i})\frac{1}{w} + 1 &= 0 \quad || \cdot w\overline{w} \\ (1+\mathrm{i})w + (1-\mathrm{i})\overline{w} + 1w\overline{w} &= 0 \\ K'\colon w\overline{w} - (-1-\mathrm{i})w - (-1+\mathrm{i})\overline{w} &= 0 \end{aligned}$$

geometrische Deutung: Eine Gerade nicht durch den Ursprung (Kreis durch ∞) wird auf einen Kreis durch den Ursprung abgebildet.

Aufgabe 19

Umkehrabbildung: $w = 1/\overline{z} \quad \Rightarrow \quad z = 1/\overline{w}$

$$\overline{z} = 1/w$$

$$z\overline{z} - (1+\mathrm{i})z - (1-\mathrm{i})\overline{z} = 0$$

$$\frac{1}{w} \cdot \frac{1}{\overline{w}} - (1+\mathrm{i})\frac{1}{\overline{w}} - (1-\mathrm{i})\frac{1}{w} = 0 \quad || \cdot w\overline{w}$$

$$1 - (1+\mathrm{i})w - (1-\mathrm{i})\overline{w} = 0$$

$$K'\colon (-1-\mathrm{i})w + (-1+\mathrm{i})\overline{w} + 1 = 0$$

geometrische Deutung: Ein Kreis durch den Ursprung wird auf eine Gerade nicht durch den Ursprung (Kreis durch ∞) abgebildet.

Aufgabe 20

Umkehrabbildung: $w = 1/\overline{z} \quad \Rightarrow \quad z = 1/\overline{w}$

$$\overline{z} = 1/w$$

$$z\overline{z} - (1+\mathrm{i})z - (1-\mathrm{i})\overline{z} + \tfrac{1}{2} = 0$$

$$\frac{1}{w} \cdot \frac{1}{\overline{w}} - (1+\mathrm{i})\frac{1}{\overline{w}} - (1-\mathrm{i})\frac{1}{w} + \tfrac{1}{2} = 0 \quad || \cdot w\overline{w}$$

$$1 - (1+\mathrm{i})w - (1-\mathrm{i})\overline{w} + \tfrac{1}{2}w\overline{w} = 0$$

$$K'\colon w\overline{w} - (2+2\mathrm{i})w - (2-2\mathrm{i})\overline{w} + 2 = 0$$

geometrische Deutung: Ein Kreis nicht durch den Ursprung wird auf einen Kreis nicht durch den Ursprung abgebildet.